Gheorghe Gussi

ITINERAR ÎN ANALIZA MATEMATICĂ



Lyceum

GHEORGHE GUSSI

ITINERAR ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

Coperta de
D. IONESCU

Lyceum 95

Gheorghe Gussi

ITINERAR IN ANALIZA MATEMATICĂ

Editura Albatros

INTRODUCERE

Autorul se consideră dator să precizeze încă de la început scopul şi limitele acestui volum.

Cititorul trebuie avertizat asupra ceea ce va găsi, dar mai ales asupra ceea ce nu va găsi în paginile acestei cărţi, şi asupra spiritului în care ea a fost scrisă.

În primul rînd, nu este vorba de un manual. Nu veţi găsi nici reguli de derivare sau de integrare (se presupune că le cunoaşteţi), nici artificii amuzante, nici tot felul de criterii care îşi au locul în tratate sistematice. Volumul de faţă nu poate şi nici nu ţinteşte să se substituie cărţilor sau tratatelor de analiză matematică existente (şi cititorul român are norocul de a avea la dispoziţie tratate excelente în acest domeniu!). Nu este însă nici o carte de foarte largă popularizare în sensul uzual; nu veţi găsi decît un minim strict necesar de istorie, iar aspectul anecdotic lipseşte în mod premeditat. Lucrarea se vrea mai degrabă o carte de iniţiere şi ca atare atenţia principală este îndreptată asupra aspectului principial, noţional, al chestiunilor tratate, evitîndu-se, în măsura posibilului, complicaţiile tehnice.

Lucrarea urmăreşte să familiarizeze cititorul cu unele dintre noţiunile şi aspectele cele mai importante ale analizei (noţiunile de funcţie, de continuitate, de integrală, de diferenţială, de analiticitate) utilizînd, ori de cîte ori a fost necesar, noţiuni de topologie şi de analiză funcţională. Convingerea autorului este că în acest mod se poate ajunge cu mai multă uşurinţă la rezultate importante ale analizei şi că tocmai această îmbinare de aspecte, unele pur analitice, altele geometrice, sînt caracteristice analizei matematice contemporane. O altă convingere a autorului este că prezentarea unei teorii matematice trebuie să treacă bariera inevitabilă a banalităţilor pentru a ajunge la cîteva

rezultate semnificative, acesta fiind singurul mod în care se poate dovedi eficacitatea şi interesul noţiunilor introduse. Rezultatele expuse sînt tratate în mod diferenţiat. Se dau definiţii precise, iar rezultatele principale sînt demonstrate complet. În demonstraţii se utilizează patru teoreme, nedemonstrate (din motive diferite pentru fiecare din ele): este vorba de lema lui Zorn, teorema de compacitate a spaţiilor produs a lui Tihonov, teorema lui Fubini şi formula integrală a lui Cauchy. Alte afirmaţii nu sînt demonstrate, lăsînd aceasta în grija cititorului, drept exerciţii utile (şi relativ simple). În sfîrşit, aproape fiecare capitol cuprinde şi o serie de teoreme, clasice sau recente, ale căror enunţuri sînt perfect accesibile cititorului, dar ale căror demonstraţii, datorită dificultăţii lor, nu-şi au locul aici. Importanţa lor (cum ar fi de pildă teorema de pregătire) le justifică însă prezenţa. Ritmul expunerii are tendinţa să crească în capitolele ultime, ceea ce este firesc.

Cititorului nu i se cer, în principiu, decît cunoştinţele predate în liceu: de fapt o anumită putere de abstractizare, imaginaţie şi dorinţă de înţelegere sînt absolut necesare. Autorul respectă „regula jocului". Se atrage atenţia asupra a ceea ce este şi ceea ce nu este demonstrat, iar afirmaţiile nedemonstrate, urmate de un „De ce?", nu ascund în ele dificultăţi escamotate astfel de autor, ci sînt perfect accesibile cititorului atent.

Desigur, i se cere acestuia un efort suficient de serios. Cartea trebuie citită cu creionul în mînă. Speranţa autorului este însă că studiul cărţii permite apoi cititorului interesat să se orienteze uşor în tratate mult mai voluminoase şi că abordarea unor texte mai avansate nu va pune dificultăţi principiale.

Materialul prezentat este bineînţeles fructul unei alegeri ce ţine de cunoştinţele, experienţa, gusturile autorului şi, într-o mare măsură, de spaţiul avut la dispoziţie. Desigur se puteau face şi alte alegeri la fel de îndreptăţite, dar un anume caracter subiectiv nu poate fi înlăturat. Autorul a ţinut însă să nu încarce textul cu definiţii prea numeroase şi a încercat să arate acea pendulare continuă între general

şi particular, specifică cercetării matematice. În sfîrşit, într-un text dedicat analizei, era greu să lipsească noţiunea de analiticitate. Motive evidente de spaţiu nu au permis însă indicarea generalizărilor în cadrul algebrelor de funcţii ale acestei noţiuni.

În ceea ce priveşte partea „istorică", studiul evoluţiei unei discipline matematice prezintă cu adevărat interes doar pentru cei ce au ajuns la o cunoaştere suficient de serioasă a disciplinei respective. În caz contrar, totul rămîne superficial şi deci inutil. Aceasta explică locul restrîns acordat aspectului istoric în cadrul acestei cărţi.

La finele volumului se găsesc indicaţii privind eventuale lecturi ulterioare, şi o bibliografie precisă privind chestiunile nedemonstrate.

CAPITOLUL I

NUMERE, MULȚIMI, TOPOLOGIE

Ce sînt numerele reale?

Oamenii au avut nevoie de numere din cele mai vechi timpuri și de aceea noțiunea de număr natural, cea care intervine în orice operație de numărare, a fost cunoscută de multă, multă vreme. Operațiile de măsurare arată însă că numărul natural nu este suficient: apare noțiunea de raport a două mărimi. Numărul zero și introducerea sa în calcule se datorește matematicii hinduse, ca de altfel și utilizarea numerelor negative. Cunoașteți desigur raționamentul lui Euclid care demonstra că $\sqrt{2}$ nu este un număr rațional. Acest rezultat, împreună cu teorema lui Pitagora, arată că diagonala unui pătrat nu este „comensurabilă" cu latura pătratului. Dar ce este $\sqrt{2}$? Sau ce sînt numerele care nu sînt raționale?

Sub o formă puțin maniabilă, teoria „mărimilor", datorată lui Eudox, și expusă sistematic în Cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid, era o primă tentativă, perfect coerentă din punct de vedere logic, de a construi o teorie a numerelor reale. Eudox își construiește teoria mărimilor în mod axiomatic; găsim acolo și ceea ce se numește axioma lui Arhimede, fără de care nu se pot caracteriza axiomatic numerele reale; fundarea axiomatică a lui Eudox este suficientă pentru a defini numerele reale.

Teoria lui Eudox era însă puțin favorabilă calculului numeric și algebric (două mărimi defineau un raport, care era un operator ce asocia unei mărimi altă mărime; rapoartele se puteau înmulți, dar nu se puteau aduna; mărimile se puteau aduna, dar nu se puteau înmulți). De aceea ea a fost lăsată uitării în întreg evul mediu. Dar încă din secolul al XVI-lea R. Bombelli expune în algebra sa un punct de vedere „modern": el recunoaște că, o dată ce s-a ales o unitate

de măsură, există o corespondență biunivocă între lungimi și raporturile de mărimi, și se obține astfel definiția geometrică a corpului numerelor reale. Pare ciudat că tocmai dezvoltarea calculului diferențial (și teoria seriilor) să fi întîrziat apariția unei teorii definitive a numerelor reale. De abia în 1821 A.L. Cauchy*, plecînd de la criteriul ce-i poartă astăzi numele, și admis ca evident, și de la axiomele teoriei mărimilor (punct de vedere care era și al lui Newton), definește noțiunea de limită și de convergență. Pentru Cauchy numerele sînt deci definite de axiomele mărimilor și de criteriul său, ceea ce este într-adevăr corect; pe de altă parte, încă înaintea lui Cauchy, matematicianul ceh B. Bolzano enunță, în 1817, criteriul lui Cauchy (pe care crede că-l demonstrează) și cu ajutorul acestuia demonstrează că o funcție continuă nu-și poate schimba semnul fără a se anula.

Teoria numerelor reale, sub forma sa modernă, se datorește lui R. Dedekind și G. Cantor. Dedekind definește numerele reale cu ajutorul tăieturilor, ceea ce se aseamănă cu definițiile lui Eudox; Cantor va utiliza metoda completării, plecînd de la numerele raționale. Această metodă a completării se va aplica apoi la numeroase alte situații, dintre care vom întîlni și noi cîteva în volumul de față.

Atît Dedekind, cît și Cantor utilizează sistematic noțiunea de mulțime. De fapt, G. Cantor a fost creatorul teoriei mulțimilor și el a fost condus la această teorie de cercetările sale asupra seriilor trigonometrice.

Dar să ne întoarcem la numerele reale. După ce am povestit pe scurt diferite etape ale evoluției noțiunii de număr real, e normal să ne întrebăm: știm într-adevăr ce este un număr real? Ce este pentru dv. $\sqrt{2}$? Este 1,41? sau este 1,412? sau ...? Dar numărul π? Știm că este raportul dintre lungimea cercului și diametru, dar cu cît este egal π? (Ca să nu mai vorbim că însăși noțiunea de lungime a cercului necesită o discuție mai atentă.) Ideea noastră

---

* A. L. C a u c h y, *Oeuvres complètes*, vol. III, Ed. Gauthier-Villars, Paris 1882—1958.

intuitivă, naivă dacă vreți, dar în esență corectă, este că $\sqrt{2}$, de pildă, nu este egal cu nici unul dintre diferitele numere pe care putem să le calculăm cu din ce în ce mai multe zecimale aproximîndu-l pe $\sqrt{2}$, ci că este *caracterizat* de întreg șirul acestor aproximări. Cu alte cuvinte, lui $\sqrt{2}$ nu-i corespunde o valoare anumită, ci un întreg șir de valori, fiecare din acestea diferînd de următoarea „din ce în ce mai puțin". Verificați că același lucru se întîmplă cu π, și cu oricare alt număr „irațional" pe care-l aveți la îndemînă. Remarcați că pînă în prezent n-am definit încă precis ce este un număr real, așa încît pînă în prezent discuția are un caracter euristic. E timpul să trecem la o discuție mai precisă; vom avea însă nevoie de o serie de noțiuni, și în primul rînd de noțiunea de mulțime.*

În cele ce urmează vom adopta punctul de vedere „naiv", neformalizat. Noțiunea de mulțime este o noțiune primară. Avem de-a face cu mulțimi în cele mai variate împrejurări și probabil cel mai bun lucru de făcut este să dăm cîteva exemple. De pildă, este clar ce înseamnă mulțimea tuturor numerelor impare. La fel de clară este noțiunea de mulțimea locuitorilor orașului București (la un moment dat), sau mulțimea (sau colecția) ziarelor publicate în România în anul 1960. Toate acestea sînt mulțimi, dar prima (mulțimea numerelor impare) se deosebește de celelalte prin două aspecte: 1) este infinită, 2) se referă la obiecte abstracte, matematice.

Numerele impare, sau locuitorii orașului București, sau ziarele publicate în 1960, sînt elementele mulțimii respective. Se remarcă, din aceste exemple simple, că apartenența unui element rezultă din faptul că el are o anumită proprietate: aceea de a fi impar, de pildă. Din motive pe care le vom vedea îndată, are sens și este chiar necesar să consi-

* Deși a apărut în mod explicit tîrziu în istoria matematicii, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, noțiunea de mulțime a jucat și joacă un rol fundamental în matematică. S-a crezut chiar, la un moment dat, că întreaga matematică se poate construi plecînd de la noțiunea de mulțime, idee părăsită astăzi.

derăm *mulţimea vidă* notată cu $\emptyset$, mulţime care nu conţine nici un element. Dacă definim mulţimile ca familii de obiecte care posedă o anumită proprietate, putem cădea uşor peste mulţimea vidă. De pildă mulţimea numerelor impare nenule care se divid prin 2 este evident mulţimea vidă, căci nu există nici un număr impar care să se dividă cu 2.

În cele ce urmează mulţimile vor fi notate cu majuscule, A, B, M, T, X etc., iar elementele cu litere mici. Faptul că un element aparţine unei mulţimi se notează cu $\in$ (semnul de apartenenţă). Deci $x \in A$ înseamnă că elementul x aparţine mulţimii A. Faptul că un element *nu* aparţine unei mulţimi se notează cu $\notin$: deci $y \notin A$ înseamnă: elementul y *nu* aparţine lui A.

O submulţime B a unei mulţimi A este o mulţime ale cărei elemente aparţin toate lui A; se spune atunci că B este *inclusă* în mulţimea A, şi aceasta se notează astfel: $B \subset A$ (această notaţie *nu* implică însă că B este diferită de A; s-ar putea ca B să coincidă cu mulţimea A, adică B să aibă exact aceleaşi elemente).

Fie T o mulţime dată şi să presupunem că de acum încolo toate mulţimile ce le vom considera (pînă la specificaţia contrară) sînt submulţimi ale lui T (se spune că T este mulţimea de bază, sau totală). Dacă A şi B sînt două mulţimi, *reuniunea* lor, notată cu $A \cup B$, este mulţimea acelor elemente care aparţin cel puţin uneia din mulţimile A sau B, iar *intersecţia* lor, $A \cap B$, este formată din acele elemente ce aparţin simultan atît lui A cît şi lui B. Dacă $A \cap B = \emptyset$, se spune că A şi B sînt *disjuncte. Complementara* lui A, notată CA, este mulţimea elementelor care *nu aparţin* lui A; cum un element sau aparţine sau nu aparţine lui A, rezultă că $A \cup CA = T$. Este clar că complementara unei mulţimi depinde de mulţimea totală T; schimbînd pe T se schimbă şi complementara (daţi un exemplu!).

Sînt uşor de verificat următoarele relaţii:

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(pentru a demonstra egalitatea a două mulţimi se foloseşte

faptul că $A = B$ este echivalent cu $A \subset B$ şi $B \subset A$; acesta este analog cu faptul că $a = b$ (a şi b numere) este echivalent cu $a \leqslant b$, $b \leqslant a$).

Să demonstrăm de pildă pe (1). Mai întîi: $x \in (A \cup B) \cap C$ implică $x \in A \cup B$ şi x aparţine lui C; dar $x \in A \cup B$ implică $x \in A$ sau $x \in B$, deci în definitiv, dacă de exemplu $x \in A$, cum în orice caz $x \in C$, atunci $x \in A \cap C$, deci $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ şi avem incluziunea $\subset$. Reciproc, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ implică $x \in A \cap C$ sau $x \in B \cap C$, deci $x \in A \cup B$ şi $x \in C$, prin urmare $x \in (A \cup B) \cap C$.

Alte relaţii (cunoscute sub numele de relaţiile lui De Morgan)

(3) $C(A \cup B) = CA \cap CB$ şi $C(A \cap B) = CA \cup CB$,

se pot demonstra în mod similar.

Toate acestea, implicit sau explicit, erau cunoscute de multă vreme şi, chiar înaintea lui G. Cantor, logicianul englez G. Boole are ideea de a face un calcul al mulţimilor. Ceea ce a adus nou G. Cantor a fost studiul mulţimilor infinite. După cum se vede, în relaţiile simple scrise mai înainte (şi în multe altele) nu intervine cîtuşi de puţin ideea de comparare, ideea de corespondenţă biunivocă.

Matematicienii lucrau de multă vreme cu infinitul, dar pînă la Cantor era vorba de considerarea unui infinit „potenţial", nu „actual", de pildă, mărimi care puteau creşte oricît de mult, dar nu se făcea studiul şi compararea unor mulţimi infinite date.

Dar ce este o mulţime infinită? Pur şi simplu o mulţime care nu este finită. Probabil că o astfel de definiţie negativă nu vă va mulţumi, dar vom vedea puţin mai tîrziu diferite chestiuni referitoare la mulţimile infinite, care au părut cu totul surprinzătoare, atunci cînd au fost descoperite.

Pentru dv. trebuie să fie clar însă faptul că, dacă considerăm două mulţimi finite, A şi B, şi $A \subset B$, $A \neq B$, atunci A are mai puţine elemente decît B. Ei bine, acest lucru este fals pentru mulţimile infinite. Afirmaţiile făcute nu sînt prea precise, căci ce înseamnă că din două mulţimi infinite una „are mai puţine" elemente decît cealaltă?

Pentru aceasta (și din alte motive pe care le vom vedea în curînd) este necesară introducerea noțiunii de *relație de echivalență*. Fie o familie de elemente (care pot fi în particular mulțimi) $\mathcal{F}$ și în $\mathcal{F}$ fie dată o relație R ce verifică următoarele condiții: 1) aRa (reflexivitate); 2) aRb implică bRa (simetrie); 3) aRb, bRc implică aRc (tranzitivitate). O astfel de relație se numește relație de echivalență. Evident că dacă $\mathcal{F}$ este mulțimea numerelor întregi și R este relația de egalitate, atunci, cu notațiile obișnuite, $a = a$, $a = b$ implică $b = a$ și dacă $a = b$, $b = c$, atunci și $a = c$, deci „=" este o relație de echivalență. Dar există nenumărate alte exemple în care R, relație de echivalență, *nu este* egalitatea. Un exemplu aritmetic simplu este dat de noțiunea de congruență: fie p un număr întreg (nenul). Se spune că $a \equiv b$ (mod p) (citiți „a este congruent cu b, modulo p"), dacă $a - b$ este un multiplu al lui p, adică dacă $a - b = mp$, m fiind un număr întreg oarecare. Se verifică imediat că „$\equiv$" este o relație de echivalență. Alt exemplu, geometric de astă dată: fie $\mathcal{F}$ mulțimea triunghiurilor din plan, R fiind relația de asemănare ($\sim$): $T_1 \sim T_2$ înseamnă deci că T_1 și T_2 sînt triunghiuri asemenea. Reflexivitatea, simetria și tranzitivitatea relației $\sim$ sînt evidente, deci relația de asemănare este o relație de echivalență (care desigur nu este relația de egalitate).

Important este faptul că, fiind dată o relație de echivalență R într-o familie, această relație determină împărțirea familiei respective în clase de echivalență, disjuncte două cîte două (am folosit termenul de familie, sinonim cu cel de mulțime, pentru că în general — dar nu întotdeauna — elementele familiei vor fi ele înseși mulțimi). Cum rezultă aceasta? Fiind dat un element $a \in \mathcal{F}$, considerăm mulțimea M_a a tuturor elementelor a' din $\mathcal{F}$, echivalente cu a. Orice $a' \in M_a$ este (din definiție) echivalent cu a, dar, mai mult, dacă $a'' \in M_a$ este alt element, atunci a' rezultă echivalent cu a'' (căci $a'Ra$, $a''Ra$, deci din tranzitivitate și simetrie rezultă $a'Ra''$), deci în M_a toate elementele sînt echivalente între ele și de aceea submulțimile lui $\mathcal{F}$ de forma M_a se numesc clase de echivalență. Am atașat astfel fieca-

rui $a \in \mathfrak{F}$ o clasă M. Acum, dacă a şi b sînt două elemente distincte din $\mathfrak{F}$, atunci se pot ivi doar două situaţii: sau $M_a = M_b$, sau $M_a \cap M_b = \emptyset$ (adică M_a şi M_b sînt disjuncte!). Să presupunem că $M_a \cap M_b$ nu este vidă; există atunci cel puţin un $c \in M_a \cap M_b$; dar $c \in M_a$ implică c echivalent cu a; la fel c va fi echivalent cu b, deci, în definitiv, a va fi echivalent cu b şi deci $M_a = M_b$. Cu alte cuvinte, $\mathfrak{F}$ se poate scrie ca o reuniune de clase de echivalenţă: $\mathfrak{F} = \bigcup M_a$.

Să introducem acum noţiunea de *corespondenţă biunivocă*: fie M_1 şi M_2 două mulţimi: se spune că ele sînt în corespondenţă biunivocă dacă fiecărui element $x \in M_1$ i s-a ataşat (sau „i s-a făcut să corespundă", sau, „i s-a pus în corespondenţă") un element $y \in M_2$, astfel încît: 1) dacă x şi x' sînt două elemente distincte din M_1, atunci elementele corespunzătoare y şi y' (din M_2) sînt şi ele distincte; 2) orice element din M_2 corespunde unui element din M_1 (şi din 1) rezultă că unuia singur).

În familia tuturor submulţimilor unei mulţimi T, să considerăm relaţia definită astfel: $M \sim N$, dacă M şi N pot fi puse în corespondenţă biunivocă; relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Două mulţimi care sînt în aceeaşi clasă de echivalenţă (faţă de această relaţie) se spune că sînt de aceeaşi putere, sau că au aceeaşi putere. Să remarcăm că $M_1 \sim M_2$ înseamnă că cele două mulţimi pot fi puse în corespondenţă biunivocă, fără a specifica modul efectiv în care se realizează această corespondenţă; în fapt corespondenţa se poate realiza în multe moduri. Ce se întîmplă cu mulţimile finite? Dacă $M \sim N$, atunci ele au acelaşi număr de elemente; deci, dacă A este o submulţime a unei mulţimi B finite şi $A \neq B$, atunci A va avea *mai puţine* elemente ca B şi nu va putea fi niciodată în corespondenţă biunivocă cu B, cu alte cuvinte A nu va fi niciodată echivalentă cu B în sensul arătat mai sus. Aceasta corespunde faptului că „o parte este mai mică decît întregul". Pentru mulţimile infinite această afirmaţie este falsă, cu alte cuvinte se poate întîmpla ca $A \subset B$, $A \neq B$ şi totuşi A şi



Georg Cantor
(1849—1915)

B să aibă aceeaşi putere şi am putea defini mulţimile infinite ca fiind caracterizate de această proprietate.

G. Cantor a edificat o întreagă aritmetică a „puterilor" mulţimilor, asociind fiecărei clase de echivalenţă faţă de relaţia $\sim$ un simbol, numit număr cardinal, şi a arătat — un fapt de-a dreptul revoluţionar — că printre mulţimile infinite există o întreagă ierarhie, unele mulţimi fiind „mai infinite" decît altele, în sensul că există mulţimi infinite între care nu se pot stabili corespondenţe biunivoce, dînd un procedeu care permite să obţinem mulţimi „din ce în ce mai infinite", adică un procedeu care să ne furnizeze mulţimi cu numere cardinale din ce în ce mai mari.

Toate aceste consideraţii ne-au dus, în aparenţă, destul de departe de numerele noastre, dar acum sîntem în măsură

să le definim*. Ar mai trebui precizat ce este un şir; dar desigur, că aceasta vă este o noţiune cunoscută. Totuşi: un şir este o funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale N cu valori într-o mulţime dată. Notînd cu a_n elementul care corespunde numărului n, şirul se va nota $a_1, a_2 \ldots,$ $a_n, \ldots$ (pe scurt: (a_n)), în care însă se poate foarte bine ca unii termeni să coincidă.

Să considerăm acum şiruri ale căror elemente sînt numere raţionale (ştiţi că orice număr raţional poate fi reprezentat sub forma $\frac{p}{q}$ cu p şi q întregi, $q \geqslant 1$). Vom spune că un astfel de şir $(a_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ (cu a_n număr raţional pentru orice n) este un şir Cauchy, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un indice $N = N(\varepsilon)$ (deci un indice ce depinde de ε, acest ε fiind de asemenea raţional căci nu cunoaştem alte numere!) astfel ca, pentru orice $n, m > N(\varepsilon)$, să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Intuitiv vorbind, aceasta înseamnă că începînd de la un rang dat, elementele şirului diferă între ele cu mai puţin decît un număr pozitiv dat arbitrar. Şirul (a_n) tinde către zero, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $|a_n| < \varepsilon$.

Să notăm cu R mulţimea şirurilor Cauchy de numere raţionale, fiecare şir fiind notat printr-o singură literă $a = (a_n)_{1 \leqslant n < \infty}$; în R se poate defini suma, diferenţa, produsul şi cîtul (cu restricţia ca numitorul să nu tindă către zero) a două şiruri. Anume, dacă $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, atunci suma lor va fi şirul $c = (c_n)$, unde $c_n = a_n + b_n$; diferenţa $a - b$ va fi şirul $(a_n - b_n)$, iar produsul ab va fi şirul $(a_n b_n)$. Se verifică imediat, din definiţii, că aceste operaţii conduc de asemenea la şiruri Cauchy. Să introducem în R relaţia de echivalenţă $a \sim b$ definită astfel: $a \sim b$ dacă şirul $a - b = (a_n - b_n)$ este un şir ce tinde către zero. Că această relaţie este o echivalenţă se verifică uşor: $a \sim a$ căci, banal, şirul (0,0, ... ,0 , ...) este şir Cauchy; simetria „$a \sim b$ implică $b \sim a$" de asemenea căci dacă $a \sim b$,

* Presupunem cunoscută de cititor noţiunea de număr raţional

atunci $|a_n - b_n| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$: cum $|b_n - a_n| = |a_n - b_n|$, rezultă şi simetria relaţiei $\sim$. Tranzitivitatea: dacă $a \sim b$, şi $b \sim c$, atunci $a \sim c$. Fie dat un $\varepsilon > 0$; atunci există $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ astfel încît, pentru $n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, să avem $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. La fel există $N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, astfel ca $n > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ să implice $|b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$; deci din $|a_n - c_n| \leqslant |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$, pentru $n > \max(N_1, N_2) = N$, rezultă $|a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, prin urmare $a \sim c$.

Avînd o relaţie de echivalenţă, avem şi o descompunere a lui R în clase de echivalenţă. Prin definiţie, un *număr real* este o astfel de clasă de echivalenţă. Cu alte cuvinte un număr real este o clasă de şiruri Cauchy de numere raţionale, echivalente în sensul că diferenţa a oricare două dintre ele tinde către zero. Aceasta corespunde noţiunii de aproximare; de pildă, în cazul lui $\sqrt{2}$, acesta va fi definit de şirul 1, 1,4, 1,41, ... , al aproximărilor ce se obţin atunci cînd calculăm $\sqrt{2}$.

Dacă spunem că un şir (a_n) are o limită α, dacă $(a_n - \alpha) \to 0$ (ceea ce revine, în mod precis, la: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru $n > N(\varepsilon)$, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$), atunci introducerea numerelor reale apare ca o *operaţie de completare*. Într-adevăr, cînd considerăm şirurile Cauchy de numere raţionale, unele au o limită raţională, *i.e.** există şiruri Cauchy (a_n) pentru care există un număr raţional $\frac{p}{q}$ cu proprietatea $\left(a_n - \frac{p}{q}\right) \to 0$, dar există şi şiruri Cauchy care (în cadrul numerelor raţionale) *n-au limită*, cel mai simplu exemplu fiind chiar şirul aproximărilor lui $\sqrt{2}$. Prin introducerea noilor elemente, numerele reale, construcţia precedentă lărgeşte clasa considerată, dar noua clasă posedă această proprietate importantă:

* Prescurtarea expresiei latineşti *id est*, care se poate traduce prin *adică*.

orice şir Cauchy are o limită. Acesta este faimosul criteriu al lui Cauchy.

Înainte de a trece mai departe, să vedem în ce măsură numerele raţionale sînt un caz particular de numere reale (altfel spus: de ce mulţimea numerelor raţionale este o submulţime a mulţimii numerelor reale). Dacă fiecărui număr raţional $\frac{p}{q}$ îi asociem şirul $\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q}, \frac{p}{q}, \ldots\right)$, evident că acest şir este un şir Cauchy; în acest mod mulţimea numerelor raţionale este pusă în corespondenţă biunivocă cu mulţimea şirurilor constante. Dacă trecem acum la clase de echivalenţă, remarcăm că două astfel de şiruri constante sau sînt identice sau nu sînt echivalente, deci la numere raţionale distincte corespund clase de echivalenţă distincte. În modul acesta, identificînd numărul raţional cu clasa sa de echivalenţă, obţinem că mulţimea numerelor raţionale este o submulţime Q a mulţimii numerelor reale $\boldsymbol{R}$. Încă cîteva observaţii simple: dacă un şir are o limită, această limită este unică, după cum rezultă imediat din definiţia limitei (puteţi să explicitaţi demonstraţia). Apoi, dacă un subşir al unui şir Cauchy are o limită, şirul însuşi are aceeaşi limită (un subşir al şirului (a_n) este un şir de forma $(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$ cu $n_k \to \infty$ cînd $k \to \infty$), ceea ce este iarăşi aproape evident.

Pentru a enunţa şi demonstra criteriul lui Cauchy, ar trebui să ştim mai întîi ce este un şir Cauchy de numere reale (ştim ce înseamnă şir Cauchy doar dacă toţi termenii şirului sînt numere raţionale); dacă vrem să copiem definiţia dată în cazul raţional, ar fi suficient să ştim cum să definim valoarea absolută $|\alpha|$ a unui număr real α. Pentru aceasta ajunge să ştim ce înseamnă că un număr real α este pozitiv.

Este firească următoarea definiţie: un număr real α este nenegativ (notaţia: $\alpha \geqslant 0$) dacă el poate fi definit cu ajutorul unui şir de numere raţionale $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ nenegative; α este strict mai mare ca zero, dacă există un număr raţional şi pozitiv r, astfel încît $r < a_n$ pentru orice n (atenţie! un număr real α este o clasă de echivalenţă de

şiruri de numere raţionale; se spune că un astfel de şir defineşte pe α dacă el aparţine clasei de echivalenţă α; deci reprezentarea numerelor reale prin şiruri nu este unică, dar, bineînţeles, două şiruri care definesc un acelaşi α sînt echivalente). Din definiţia unui şir Cauchy rezultă că primii termeni ai unui astfel de şir nu au nici un fel de importanţă; mai precis, dacă $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ este un şir Cauchy, atunci, pentru orice număr natural N, şirul $(a_N, a_{N+1}, ..., a_{N+p}, ...)$ este tot un şir Cauchy şi defineşte acelaşi număr real ca şi şirul iniţial $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$. Pe baza acestei observaţii, putem spune că $\alpha \geqslant 0$, dacă, cu excepţia unui număr finit de termeni, orice şir care îl defineşte are toţi termenii nenegativi.

O dată ce ştim ce înseamnă $\alpha \geqslant 0$, definind operaţiile între numere reale ca operaţiile corespunzătoare între termenii şirurilor ce definesc aceste numere, ştim ce înseamnă, de pildă, $\alpha \geqslant \beta$ (aceasta revine la $\alpha - \beta \geqslant 0$). Vom defini valoarea absolută $|\alpha|$ ca egală cu α, dacă $\alpha > 0$, egală cu $-\alpha$, dacă $\alpha < 0$ şi egală cu zero dacă $\alpha = 0$.

Un şir Cauchy de numere reale va fi un şir (α_n), dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $N(\varepsilon)$ astfel încît să avem $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$, de îndată ce $n,m > N(\varepsilon)$. Întrucît se verifică uşor că $|\alpha|$ este definit de şirul $(|a_n|)$ dacă α este definit de şirul (a_n), rezultă imediat că pentru numerele raţionale definiţia coincide cu cea iniţială. Vedeţi că, deşi nu prea grele, totuşi lucrurile se complică puţin; trebuie să avem grijă să lucrăm numai cu noţiuni pe care le-am definit mai înainte.

Să verificăm că dacă α este definit de $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ (vom scrie $\alpha = (a_1, ..., a_n, ...)$ sau $\alpha = (a_n)$), atunci $|\alpha - a_n|$ tinde către zero. Conform definiţiei, $|\alpha - a_n|$ este definit de şirul $(|a_1 - a_n|, |a_2 - a_n|, ..., |a_p - a_n|, ...)$. Pentru ca $|\alpha - a_n|$ să tindă către zero, este suficient (conform definiţiei) ca, pentru orice $\varepsilon > 0$ (îl vom lua pe ε raţional, veţi vedea că aceasta ajunge), să existe un întreg $N = N(\varepsilon)$ astfel încît $|\alpha - a_n| < \varepsilon$. Dar relaţia de ordine $\alpha \geqslant \beta$ în acest caz ne spune că $|\alpha - a_n| < \varepsilon$ este echivalent cu $|a_1 - a_n|$, $|a_2 - a_n|, ..., |a_j - a_n|, ...$

...) $\leqslant (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \ldots)$ ultima relație fiind într-adevăr valabilă căci (a_n) este un șir Cauchy. Să observăm acum că pentru orice $\alpha > 0$, există un număr rațional ε, pozitiv, $\varepsilon < \alpha$, ceea ce rezultă banal din definiții, și cu aceasta demonstrația este complet încheiată. În toate considerentele făcute pînă în prezent apare acel ε pozitiv arbitrar. Aceasta este însăși esența noțiunii de limită, legată de ceea ce se numește structura topologică a mulțimii considerate (la noi numerele raționale, respectiv reale).

Criteriul lui Cauchy — orice șir Cauchy de numere reale are o limită (sau, cum se mai spune, este convergent) — rezultă acum ușor. În primul rînd trebuie observat că am demonstrat deja că orice șir Cauchy de numere raționale are o limită, atunci cînd am arătat că dacă $\alpha = (a_n)$ avem $|\alpha - a_n| \to 0$, căci orice astfel de șir definește un număr α și deci (prin cele arătate) șirul nostru tinde către α. Rămîne doar de arătat că orice șir de numere reale, care este un șir Cauchy, are o limită. Fie deci $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ un astfel de șir. Vom utiliza următoarea observație (încercați s-o demonstrați): dacă α și β sînt două numere reale, distincte (să zicem că $\alpha < \beta$), atunci există totdeauna un număr rațional r cuprins între ele, adică $\alpha < r < \beta$. De aici rezultă în particular că dacă (α_n) este un șir care tinde către zero, există totdeauna un șir (a_n) de numere raționale nenule, cu $|a_n| < |\alpha_n|$ (deci care va tinde de asemenea către zero). Fie acum șirul $a_n = \frac{1}{n}$; evident el tinde către zero; fie apoi șirul $\alpha_n + \frac{1}{n} = \beta_n$; evident că $\beta_n > \alpha_n$ și $\beta_n - \alpha_n \to 0$. Conform observației, pentru fiecare n există un număr rațional r_n cuprins între α_n și β_n. Afirmație: șirul (r_n) este șir Cauchy; într-adevăr, din $\alpha_n < r_n < \beta_n$ rezultă $r_n - r_m = r_n - \beta_n + \beta_n - \beta_m + \beta_m - r_m$, deci, $\varepsilon > 0$ fiind dat, pentru n și m suficient de mari $\left(\text{mai mari decît } N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ vom avea $|r_n - r_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Șirul (r_n), fiind un șir Cauchy ai cărui termeni sînt numere raționale, are o

limită α. Acum $|\alpha - \alpha_n| \leqslant |\alpha - r_n| + |r_n - \alpha_n| \leqslant |\alpha - r_n| + \frac{1}{n}$, deci în definitiv $|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$ dacă $n > N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ şi demonstraţia e terminată.

O dată construite numerele reale, ar rămîne bineînţeles să definim operaţiile între ele (am spus doar cîteva cuvinte despre aceasta, cu ocazia introducerii relaţiei de ordine $\alpha \leqslant \beta$), ceea ce se face imediat, utilizînd proprietăţile şirurilor convergente. O chestiune însă care vă va interesa, ar fi aceea de a da o interpretare geometrică a acestor numere, ceea ce n-ar fi la drept vorbind necesar, ci doar va justifica un limbaj geometric deseori comod.

Anume, fiind dată o dreaptă, dacă fixăm pe această dreaptă o origine şi o unitate de măsură, atunci fiecărui punct de pe dreaptă îi va corespunde un număr real şi, reciproc, fiecărui număr real îi va corespunde un punct bine determinat de pe dreaptă. Pentru a stabili această corespondenţă biunivocă, ne vor fi necesare unele din axiomele care definesc dreapta, anume aşa-numita axiomă a lui Arhimede, care afirmă că, date fiind două segmente de lungime l şi t, putem totdeauna acoperi segmentul de lungime l cu un număr finit de segmente de lungime t, şi axioma lui Cantor—Dedekind, care afirmă că dacă se consideră un şir de segmente A_1B_1, A_2B_2, ..., cuprinse unele în altele, de lungime tinzînd către zero, există un punct şi numai unul singur, care să aparţină tuturor segmentelor A_nB_n (adică să aparţină intersecţiei tuturor acestor segmente).

Stabilirea corespondenţei biunivoce se face astfel: avînd o unitate de lungime, se ştie că se poate împărţi, doar cu rigla şi cu compasul, un interval în q părţi egale; de aici rezultă nemijlocit că fiecărui punct raţional de pe dreaptă îi putem asocia un număr raţional, anume lungimea segmentului determinat de acel punct şi de origine. Fie acum un punct oarecare de pe dreaptă, fixat. Graţie axiomei lui Arhimede putem să-l încadrăm, oricît de aproape vrem, prin puncte raţionale. Se obţin astfel două şiruri monotone

René Descartes
(1596—1650)



de numere raţionale, (a_n) şi (b_n) cu $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \ldots$ şi $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > \ldots$, $b_n - a_n > 0$ pentru orice n şi $b_n - a_n \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$. Evident că şirurile (a_n) şi (b_n) sînt echivalente şi că ele sînt şiruri Cauchy; deci ele definesc un acelaşi număr real, α, pe care îl asociem punctului de pe dreaptă, fixat. Prin urmare, fiecărui punct de pe dreaptă i-am asociat un număr real. Reciproc, α fiind un număr real, alegem un şir de numere raţionale (a_n), cu $a_n \leqslant \alpha$, care să-l definească pe α şi un şir (b_n) (de asemenea de numere raţionale) cu $b_n \geqslant \alpha$, care să-l definească pe α. Aceasta este totdeauna posibil. (De ce?) Considerăm punctele A_n, respectiv B_n ce corespund numerelor raţionale a_n şi b_n. (Nu uitaţi: am ales pe o dreaptă o origine şi o unitate de măsură (de altfel arbitrare)). Segmentul A_nB_n va avea

lungimea $b_n - a_n$ care tinde către zero cînd $n \to \infty$. Axioma lui Cantor—Dedekind ne asigură că există un singur punct de pe dreaptă comun tuturor intervalelor $A_n B_n$. Acesta este punctul asociat lui α.

Vom folosi în continuare, fără a-i distinge, termenii *număr real* sau *punct de pe dreaptă*. Se constată că valoarea absolută a unui număr real nu este decît lungimea segmentului determinat de origine și de punctul asociat (în modul indicat chiar înainte) numărului respectiv.

Mulțimi numărabile și nenumărabile

Introducerea riguroasă a numerelor reale ne permite să dăm un exemplu de mulțimi infinite care nu pot fi puse în corespondență biunivocă. Acest fapt, atunci cînd a fost pus în evidență de G. Cantor, a produs o adevărată senzație ! Vom vedea însă că lucrurile n-au nimic misterios.

Dar să introducem mai întîi noțiunea de mulțime numărabilă.

Prin definiție, o mulțime este numărabilă dacă are aceeași putere cu mulțimea numerelor naturale 1,2, ..., n, ..., sau, cu alte cuvinte, dacă există o corespondență biunivocă între elementele mulțimii respective și numerele naturale. Mulțimile numărabile sînt mulțimile infinite „cele mai sărace"; cu alte cuvinte, dacă o mulțime este infinită ea conține cu certitudine o submulțime numărabilă.

Chiar pe exemplul simplu al mulțimii numerelor naturale N se verifică imediat cele spuse mai înainte: dacă o mulțime este infinită, atunci ea poate fi pusă în corespondență cu o submulțime a sa. De pildă, însuși Galileo Galilei remarcase că corespondența $n \to n^2$ (asocierea la fiecare număr natural a pătratului său) constituie o corespondență biunivocă între mulțimea N și o submulțime a sa, deci că,

în cazul mulţimilor infinite, „întregul este mai mare decît părţile“ nu se poate aplica.

Puţin mai complicat de stabilit este faptul următor: mulţimea Q a numerelor raţionale este numărabilă.

Afirmaţia noastră va decurge din rezultatul general următor: Orice reuniune numărabilă de mulţimi numărabile este numărabilă. Raţionamentul pe care îl vom face arată, de asemenea, că orice reuniune finită de mulţimi numărabile, sau orice reuniune numărabilă de mulţimi finite, este numărabilă.

Fie $\{A_q\}_{q\in I}$ o familie numărabilă de mulţimi (i.e. q parcurge o familie numărabilă de indici I; din numărabilitatea acestei familii de indici rezultă că putem presupune că $q = 1, 2, \ldots, n, \ldots$).

Prin definiţie, $\bigcup\limits_{q\in I} A_q$ este mulţimea acelor elemente care aparţin cel puţin unei mulţimi A_q. Prin urmare trebuie să arătăm că mulţimea $A = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} A_q$ este numărabilă, dacă fiecare A_q este numărabilă. Pentru aceasta, ţinînd seama de numărabilitatea fiecărei mulţimi A_q, vom remarca că elementele unei mulţimi A_q se vor putea nota cu doi indici, $\{a_1^q, a_2^q \ldots, a_n^q, \ldots\}$, indicele superior q indicînd apartenenţa la mulţimea A_q. Elementele lui A se vor putea scrie într-un tablou infinit, în linia a q-a figurînd elementele mulţimii A_q. Mulţimea A va fi deci mulţimea elementelor din tabloul

$$\begin{array}{l} a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1,\ \ldots,\ a_n^1,\ \ldots \\ a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ \ldots,\ a_n^2,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^p,\ a_2^p,\ a_3^p,\ \ldots,\ a_n^p,\ \ldots \end{array}$$

Totul revine la a putea scrie aceste elemente sub forma unui şir. Dar aceasta se realizează uşor în modul următor: primul element va fi a_1^1, apoi următoarele două elemente vor fi a_1^2 şi a_2^1 (cele pentru care suma indicilor este trei) apoi a_1^3, a_2^2, a_3^1 (cele pentru care suma indicilor este patru)

ş.a.m.d. Dacă mulţimile A_q nu sînt disjuncte, s-ar putea ca anumite elemente a_k^p şi a_l^q, cu $p \neq q$, să coincidă. Eliminînd acele elemente care se repetă şi ţinînd seama de faptul evident că orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă, afirmaţia noastră rezultă. Aplicăm aceste consideraţii mulţimii Q. Mulţimile A_q vor fi mulţimea fracţiilor de forma 0, $\pm \frac{1}{q}, \pm \frac{2}{q}, \pm \frac{3}{q}, \ldots$ i.e. forma $\frac{p}{q}$ cu $q \neq 0$ număr fixat (pozitiv), p parcurgînd toate numerele întregi. Că A_q este numărabilă, vă convingeţi imediat: Q nu va fi chiar A_q, ci o submulţime a acestei reuniuni, căci A_q conţine fracţii reductibile (i.e. în care numitorii şi numărătorii au factori comuni) care reprezintă de fapt acelaşi număr raţional.

Am arătat astfel că Q este numărabilă. Ce se poate spune despre mulţimea R a numerelor reale? Ei bine, R nu este numărabilă. Acest lucru (altă descoperire a lui Cantor) poate fi demonstrat geometric în mod foarte simplu. Anume, vom arăta că mulţimea punctelor situate pe segmentul [0,1] nu este numărabilă şi, cum mulţimii acestor puncte i se asociază (după cum am văzut) o mulţime de numere reale, această mulţime nu va fi numărabilă; dar dacă R este numărabilă, orice submulţime infinită a sa are aceeaşi proprietate şi am cădea peste o contradicţie. Se procedează prin absurd. Să presupunem că $U = [0,1]$ este numărabilă, deci $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ cu fiecare $x_n \in [0,1]$. Considerăm punctul x_1. Dacă împărţim segmentul în trei părţi egale, $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ şi $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ punctul x_1 *nu va aparţine* cel puţin unuia din aceste trei intervale, fie U_1 un interval cu această proprietate (s-ar putea ca x_1 să nu aparţină la două din intervalele de mai sus; în acest caz alegem unul dintre ele, n-are importanţă care). Considerăm apoi punctul x_2 şi împărţim pe U_1 în trei intervale închise egale (deci fiecare dintre noile intervale va avea lungimea $\frac{1}{3^2}$). Punctul x_2 sau nu aparţine lui U_1 sau, dacă îi aparţine, nu

va fi situat în cel puțin unul din cele trei mici subintervale ale lui U_1; există deci U_2 cu proprietatea că $x_2 \notin U_2$. Evident $U_2 \subset U_1$. Considerăm apoi punctul x_3 și împărțim pe U_2 în trei subintervale închise egale și repetăm considerațiile făcute ș.a.m.d. În definitiv, obținem un șir $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$, de intervale închise, U_m, avînd lungimea $\frac{1}{3^m} \to 0$ cînd $m \to \infty$, și cu proprietatea că $x_m \notin U_m$. Conform axiomei Cantor—Dedekind, există un punct ξ unic, comun tuturor intervalelor U_n. Dar toate punctele din $[0,1]$ sînt de forma x_n, deci $\xi = x_{n_0}$ și deci $\xi \notin U_{n_0}$, ceea ce este absurd, căci ξ aparține tuturor intervalelor U_n. Am obținut o contradicție, deci propoziția este demonstrată.

Faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă are, pe lîngă o importanță teoretică, numeroase aplicații la teoreme de existență. Anume, dacă dintr-o mulțime numărabilă M scoatem o parte finită, ce ne rămîne va fi o mulțime infinită (de asemenea numărabilă). Dacă însă extragem din M o parte numărabilă, ceea ce rămîne poate fi eventual mulțimea vidă.

În ipoteza că M este infinită, dar nu este numărabilă (și pe baza celor spuse mai înainte există astfel de mulțimi), dacă îndepărtăm din M o parte numărabilă, ceea ce rămîne va fi cu siguranță o mulțime infinită (nenumărabilă !), deci, în particular, nevidă. Or, a spune că o mulțime este nevidă înseamnă că ea are elemente, ceea ce revine la existența unor elemente cu anumite proprietăți.

Un exemplu care ilustrează bine atît puterea cît și slăbiciunea unor astfel de raționamente „existențiale", este furnizat de mulțimea numerelor transcendente.

Se spune că un număr α este algebric, dacă el verifică o ecuație algebrică cu coeficienți întregi (sau raționali, revine la același lucru), adică dacă există un polinom $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = P(x)$ cu coeficienți întregi, astfel încît $P(\alpha) = 0$. Dacă α este algebric, există un polinom de grad minim, cu această proprietate; dacă p este gradul acelui polinom, vom spune că α este de grad p. Un polinom de grad p are $p + 1$ coeficienți. Deci mulțimea P_p a tuturor

acestor polinoame de grad p, cu coeficienţi întregi, se obţine făcînd să varieze arbitrar coeficienţii în mulţimea întregilor, prin urmare P_p este numărabilă. Întrucît orice polinom de grad p are p rădăcini (deşi unele pot fi complexe), mulţimea numerelor algebrice de grad p va fi numărabilă. Mulţimea tuturor numerelor algebrice se obţine făcînd reuniunea (după p) a mulţimilor numerelor algebrice de grad p, deci şi ea este numărabilă.

Un număr real care *nu este* algebric se numeşte *număr transcendent.*

Dacă notăm cu T mulţimea numerelor transcendente şi cu A cea a celor algebrice, $T \cup A = R$. Cum A este numărabilă, rezultă că T nu este numărabilă. În particular T nu este vidă, deci există numere transcendente (şi încă foarte multe). Dintr-un mic raţionament de teoria mulţimilor am dedus o teoremă de existenţă. Aceasta este partea „tare" a metodei. Partea „slabă" este că din acest rezultat nu putem trage nici un fel de concluzie referitoare la faptul că un număr dat este, sau nu este, transcendent. Mai mult, nici măcar nu ne oferă exemple de numere transcendente. Ştim deci că există „foarte multe" numere de acest fel, dar nu putem să furnizăm nici un exemplu.

Această situaţie se întîlneşte deseori în matematică şi este un tribut plătit generalităţii metodei. Cu toate acestea, în foarte multe situaţii (vom întîlni în cuprinsul cărţii cîteva exemple) nu putem utiliza decît raţionamente generale, dar concluziile pe care le tragem ne vor fi suficiente pentru aplicaţii.

Să ne întoarcem pentru o clipă la numerele transcendente. Un prim exemplu de astfel de numere a fost furnizat de matematicianul francez J. Liouville plecînd de la o observaţie simplă. Anume, dacă α este un număr algebric de grad n, $\frac{p}{q}$ fiind un număr raţional, atunci $P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) P'(\xi)$ (formula creşterilor finite), deci, dacă P este polinomul de grad n asociat lui α, atunci $P(\alpha) = 0$ şi $P'(\xi) \neq 0$ (căci din ipoteza că P este de grad minim, rezultă

că P și P' nu pot avea pe α ca zero comun). Intrucît $P(\alpha) = 0$, va rezulta

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{P\left(\frac{p}{q}\right)}{P'(\xi)}\right| = \left|\frac{a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a^n}{P'(\xi)}\right| =$$

$$= \frac{|a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n|}{|q^n| \, |P'(\xi)|}.$$

Dacă $\frac{p}{q}$ este suficient de aproape de α, atunci $P\left(\frac{p}{q}\right)$ nu va fi nul și deci $|a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots| \neq 0$. Dar această valoare este un număr întreg (coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ fiind întregi), cel puțin egal cu 1 și deci $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{|q^n| |P'(\xi)|}$. Să presupunem, pentru simplitate, că $\alpha > 0$. Dacă sup $|P'(\xi)| = M$ (superiorul fiind luat pe un interval suficient de mic, centrat în α), vom avea $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^n M}$ pentru orice $\frac{p}{q} \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$; deoarece pentru $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \delta$ avem evident $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{\delta}{q^n}$, rezultă că pentru orice $\frac{p}{q}$ avem $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{M_1}{q^n}$ cu $M_1 = \min\left(\frac{1}{M}, \delta\right)$. De aici se trage următoarea concluzie: dacă α este algebric, el nu poate fi aproximat „prea repede“ prin numere raționale. Deci pentru a obține numere transcendente este suficient a găsi numere α cu proprietatea că, pentru orice $c > 0$ și orice întreg n, există numere p și q ($q > 0$) astfel încît $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^n}$.

Un exemplu de astfel de număr este, de pildă, cel reprezentat de seria

$$\alpha = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^{1\cdot 2}} + \frac{\beta_3}{10^{1\cdot 2\cdot 3}} + \ldots + \frac{\beta_m}{10^{m!}} + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{10^{m!}},$$

unde $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ sînt oricare dintre numerele 0,1,2,...

..., 9, cu singura restricție de a exista o infinitate de coeficienți β_m nenuli*. Dacă luăm $\frac{p}{q} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\beta_m}{10^{m!}}$, atunci

$$0 < \alpha - \frac{p}{q} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\beta_m}{10^{m!}} \leqslant 9 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{m!}} < \frac{9}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{1}{(10^{n!})^n}.$$

Dar cum $q = 10^{n!}$, rezultă că

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n};$$

cu alte cuvinte, pentru orice n există un număr rațional $\frac{p}{q}$, astfel încît $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$.

Numărul α este deci aproximat „prea repede" prin numere raționale și deci, după cum am văzut, el va fi transcendent.

În modul acesta, fiecărui șir β_1, β_2, ... ales convenabil (și putem alege astfel de șiruri într-o infinitate de moduri) îi corespunde un număr transcendent, un număr al lui Liouville.

Acesta este un rezultat mult mai precis decît cel obținut prin metode „pure" de teoria mulțimilor. Prin urmare avem la îndemînă exemple „concrete" de numere transcendente.

Pasul următor este acela de a arăta că numere date, ca de pildă numărul π, sau e (sau altele), sînt transcendente. De data aceasta trebuie utilizate metode mult mai subtile. Demonstrația transcendenței numărului e (dată de Ch. Hermite) și, puțin după aceea, transcendența lui π (demonstrată de F. Lindemann), în a doua jumătate a secolului al XIX-lea au fost considerate, pe drept cuvînt, succese mari ale Matematicii. În particular, transcendența lui π

---

* Semnul Σ (litera greacă *sigma)* se utilizează pentru a indica operația de sumare a mai multor cantități. Astfel $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ se notează și prin $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ și se citește: sumă după i, de la $i = 1$ la n, de α_i. Dacă termenii au mai mulți indici, sumarea se face numai după indicii indicați sub semnul sigma, ceilalți rămînînd neschimbați.

arată că „cvadratura cercului“, coşmarul matematicienilor timp de secole, este imposibilă. Metodele folosite de Hermite şi Lindemann utilizează în mod esenţial calculul diferenţial şi integral*.

Vedeţi deci, pe acest exemplu, în ce constă puterea, dar şi slăbiciunea, metodelor generale. Ele ne oferă de obicei teoreme de existenţă, fără a indica modul în care se pot obţine elementele a căror existenţă a fost demonstrată. Totuşi, în nenumărate cazuri, demonstrarea existenţei este suficientă şi pare greu, astăzi, să ne dispensăm de metode de acest tip.

Topologia pe dreapta reală

Am construit numerele reale şi le-am identificat cu punctele de pe o dreaptă în care s-a fixat originea şi o unitate de lungime, şi, cu această ocazie, aţi văzut cum intervenea la tot pasul, în folosirea şi demonstrarea proprietăţilor şirurilor Cauchy, acel epsilon pozitiv arbitrar.

Să reamintim definiţia limitei: un şir (a_n) tinde către α, sau are pe α ca limită, dacă oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru orice $n > N(\varepsilon)$, să avem $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Explicitînd definiţia valorii absolute, aceasta revine la a afirma că de la un rang $N(\varepsilon)$ toate elementele a_n verifică inegalitatea: $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$. Astfel, fără s-o spunem, am introdus o noţiune topologică, noţiunea de vecinătate, şi, ca Monsieur Jourdain al lui Molière, făceam topologie fără s-o ştim. Vom defini cuvîntul topologie de abia în paragraful următor. Noţiunea de limită (şi cea de continuitate) îşi are originea încă din antichitate şi, după

* O demonstraţie a transcendenţei numerelor π şi e se găseşte în lucrarea Acad. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiza Matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966, pp. 447—450.

cum remarcă și N. Bourbaki, „nu s-ar putea face o istorie completă a acestei noțiuni fără a studia sistematic, nu numai matematicienii, ci și filozofii greci, în particular pe Aristotel, și fără a urmări evoluția acestor idei de-a lungul Renașterii și începuturilor Calculului diferențial și integral"*. Dar e din nou timpul să trecem la o discuție precisă.

Fie deci R dreapta reală. Un interval (deschis) (α,β) este, prin definiție, mulțimea punctelor x ce verifică inegalitățile: $\alpha < x < \beta$. Dacă se cere ca și extremitățile intervalului să aparțină mulțimii, se obține ceea ce se numește un interval închis, care se notează prin $[\alpha,\beta]$.

Orice mulțime de pe dreapta reală, care este o reuniune de intervale deschise, se numește *mulțime deschisă*. Orice punct al *unei mulțimi* deschise G are următoarea proprietate: există un interval (α,β) astfel încît $x \in (\alpha,\beta)$ și $(\alpha,\beta) \subset G$. Complementara oricărei mulțimi deschise se numește *mulțime închisă*. Se numește *vecinătate* a unui punct x o mulțime M care conține o mulțime deschisă U, cu proprietatea că $x \in U$. În particular, orice interval (α,β), astfel încît $a \in (\alpha,\beta)$, este o vecinătate a punctului a. Particularizînd și mai mult, orice interval de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ este o vecinătate a lui a. Deci, faptul că șirul (a_n) tinde către a se poate reformula astfel: pentru orice vecinătate a punctului a există un rang N (ce depinde de vecinătatea considerată), astfel încît, de la acel rang N, toți termenii șirului aparțin vecinătății respective. De fapt, veți putea să-mi reproșați că, din definiție, afirmația rezultă doar pentru acele vecinătăți speciale, de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Aveți dreptate, dar nu s-a comis, totuși, nici o eroare. Anume, dacă V este o vecinătate a lui a, atunci, după cum am văzut, există un interval (α,β) cu $a \in (\alpha,\beta) \subset V$. Evident că putem găsi un $\varepsilon > 0$ suficient de mic încît $\alpha < a - \varepsilon$, $a + \varepsilon < \beta$; dar atunci, dacă toate elementele șirului aparțin, de la un rang $N(\varepsilon)$, intervalului $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, cu atît mai mult ele vor aparține intervalului mai mare (α,β), deci și lui V.

* N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Ed. Hermann, Paris, 1960, p. 146.

Cu această ocazie apare următoarea noţiune; cea de *sistem fundamental de vecinătăţi*. Dacă vom nota cu $V(a)$ familia *tuturor* vecinătăţilor lui a, un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui a va fi o subfamilie B a lui $V(a)$, cu proprietatea că, pentru orice $V \in V(a)$ există un $V' \in B$, cu $V' \subset V$.

De cele mai multe ori, pentru a stabili o anumită proprietate, va fi suficientă considerarea nu a tuturor vecinătăţilor unui punct, ci doar aceea a unui sistem fundamental, observaţie simplă dar extrem de utilă, după cum veţi vedea.

O proprietate evidentă a dreptei R este următoarea: dacă a şi b sînt două puncte distincte ($a \neq b$), atunci există două vecinătăţi V_a şi V_b ale lui a şi respectiv b, astfel încît $V_a \cap V_b = \emptyset$. Se spune că dreapta este *separată*.

Fie acum F o mulţime de puncte pe dreaptă şi să presupunem că F este închisă. Fie (a_n) un şir Cauchy, cu $a_n \in F$ pentru orice n.

Concluzie: $\lim a_n = a$ aparţine de asemenea lui F (ceea ce justifică terminologia de *închisă*). Demonstraţia este simplă. Să presupunem că $a \notin F$. Atunci $a \in CF = G$, şi, conform definiţiei, G este deschisă. Deci există un interval I pe care-l putem presupune de forma $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ cu ε_0 suficient de mic, astfel ca $I \subset G$. Dar $a_n \to a$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, în particular şi pentru ε_0 al nostru, există un $N(\varepsilon)$ astfel ca, pentru $n > N(\varepsilon)$, toate elementele şirului să aparţină lui $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Cădem în definitiv peste o contradicţie: de la un rang $N(\varepsilon)$, toate elementele lui (a_n) aparţin lui I, dar $F \cap I = \emptyset$ (căci $F \cap G = F \cap CF = \emptyset$) şi deci $a_n \notin F$ pentru $n > N(\varepsilon)$. Rezultă că $a \in F$, q.e.d.

Bineînţeles, există pe dreaptă mulţimi care nu sînt însă deschise şi nici închise (daţi un exemplu simplu !).

Cum se comportă mulţimile deschise (sau închise) faţă de reuniune sau intersecţie? Orice reuniune de mulţimi deschise este deschisă şi, trecînd la complementare, orice intersecţie de mulţimi închise este închisă. Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este deschisă (şi, deci, orice reuniune finită de mulţimi închise este închisă).

Demonstrațiile sînt relativ simple și pot constitui un bun exercițiu lăsat pe seama cititorului. O categorie importantă de mulțimi închise este clasa mulțimilor compacte. În cazul dreptei, mulțimile compacte se pot defini simplu în modul următor (I): se numesc compacte mulțimile care sînt: 1) închise, 2) mărginite. (O mulțime A este mărginită, dacă, există un număr M* astfel încît $|x| < M$ pentru orice $x \in A$, sau, mai geometric, dacă există un interval finit (α,β) astfel ca $A \subset (\alpha,\beta)$).

Vom da însă o definiție a compacității, care să fie valabilă și în cazuri mult mai generale. Se spune că o familie de mulțimi $(N_\alpha)_{\alpha \in I}$ *acoperă* o mulțime M, dacă $M \subset \cup N_\alpha$ (sau, ceea ce este echivalent, dacă orice $x \in M$, aparține cel puțin unui N_α). O acoperire este finită, dacă mulțimea indicilor I este finită.

Compacitatea se poate defini astfel (II): o mulțime C este compactă, dacă din *orice* acoperire cu mulțimi deschise se poate extrage o acoperire finită (a extrage o acoperire înseamnă a alege o parte din mulțimea de indici, astfel ca mulțimile acoperirii inițiale, ce corespund indicilor aleși, să formeze și ele o acoperire a mulțimii noastre).

Rămîne să stabilim echivalența celor două definiții (ne aflăm pe dreapta reală R).

Este suficient să demonstrăm că pentru o mulțime C de pe dreaptă, faptul că este închisă și mărginită implică condiția (II) (cu acoperirile) și dacă nu este simultan închisă și mărginită, ea nu poate verifica condiția (II). Prima implicație este cunoscută sub numele de lema lui Borel—Lebesgue, după numele matematicienilor care au pus-o sistematic în evidență.

Deci vom demonstra lema lui Borel—Lebesgue, care afirmă că din orice acoperire deschisă a unei mulțimi închise și mărginite se poate extrage o acoperire finită.

Ca de obicei, se procedează prin absurd. Să presupunem că C este o mulțime închisă, conținută într-un interval (a,b). Fie $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ o acoperire a lui C, fiecare U_α fiind o

---

* M nu depinde de x.

Emile Borel
(1871—1954)



mulţime deschisă. Să presupunem că din $\mathcal{U}$ nu se poate extrage nici o acoperire finită. Atunci, împărţind pe $[a,b]$ în două segmente egale $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, cel puţin una dintre intersecţiile lui C cu unul din aceste intervale (eventual ambele) nu pot fi acoperite cu un număr finit de mulţimi ale acoperirii (căci dacă ambele ar putea fi acoperite cu un număr finit de U_α, să zicem $C \cap \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ de $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}$ şi $C \cap \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ de $U_{\alpha_{p+1}}, \ldots, U_{\alpha_n}$, atunci $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ va fi o acoperire finită a lui C). Fie $[a_1,b_1]$, cu proprietatea că $C \cap [a_1,b_1]$ nu poate fi acoperit cu un număr finit de mulţimi U_α. Îl împărţim pe $[a_1,b_1]$ în două intervale egale şi repetăm raţionamentul. Obţinem astfel un şir $[a_1,b_1] \supset$ $\supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n]$ de intervale închise de lungime

$\frac{b-a}{2^n} \to 0$, cu proprietatea că $C \cap [a_n, b_n]$ nu poate fi acoperit cu o familie finită de mulţimi U_α. Intervalele $[a_n, b_n]$ au un punct comun unic, fie el ξ. Întrucît $C \cap [a_n, b_n]$ este evident nevidă (este chiar infinită), din fiecare $C \cap [a_n, b_n]$ alegem cîte un element x_n. Dar şirul x_n, verificînd condiţia $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, este convergent şi limita sa va fi ξ; cum C este închisă, $\xi \in C$. De abia acum intervine faptul că mulţimile U_α sînt deschise: ξ va aparţine unui U_α (căci $\mathfrak{U}$ este o acoperire a lui C), deci — U_α fiind deschisă — unui interval (a', b'), prin urmare, pentru n suficient de mare, $[a_n, b_n] \subset (a', b') \subset U_\alpha$, ceea ce contrazice modul în care au fost alese intervalele $[a_n, b_n]$, q.e.d.*. Cealaltă implicaţie se demonstrează arătînd că se pot alege acoperiri deschise convenabile, astfel încît dacă (I) n-are loc, nici (II) să nu poată fi verificată (în (II) se cere ca din *orice* acoperire deschisă să putem extrage şi o acoperire finită, deci, pentru a infirma (II), este suficient să găsim *o acoperire* deschisă fără proprietatea cerută).

Noţiunea de mulţime compactă este de o extremă importanţă în analiză, dar s-a degajat tîrziu şi absenţa compacităţii creează totdeauna dificultăţi, dintre care vom întîlni cîteva şi noi.

Vom mai introduce două definiţii: un punct x_0 al unei mulţimi M se numeşte *punct aderent* al lui M, dacă în orice vecinătate a lui x_0 există cel puţin un punct al mulţimii M (eventual chiar x_0; dacă se cere ca în orice vecinătate a lui x_0 să existe un punct x al mulţimii M, diferit de x_0, punctul x_0 se numeşte *punct de acumulare* al lui M). Mulţimea punctelor aderente ale unei mulţimi se notează cu $\bar{M}$ şi se numeşte aderenţa lui M; în particular, dacă a_n este un şir de elemente din M, şi $a = \lim a_n$, atunci punctul $a \in \bar{M}$. Deci proprietatea unei mulţimi de a fi închisă se poate enunţa şi astfel: o mulţime este închisă, dacă şi numai dacă coincide cu aderenţa sa, sau, altfel, dacă îşi conţine toate

---

* Prescurtare a expresiei latineşti *quod erat demonstrandum*, care se traduce prin *ceea ce era de demonstrat*.

punctele aderente. În sfîrşit, un punct x_0 se numeşte punct interior al lui M, dacă există o vecinătate a lui x_0 inclusă în M. O mulţime va fi deschisă dacă orice punct al ei este interior. Mulţimea punctelor interioare ale lui M (mulţime care poate fi vidă: daţi un exemplu simplu!) se notează cu int M sau $\mathring{M}$.

Cu aceasta am încheiat discuţiile privind topologia de pe dreapta reală. Pînă în prezent am indicat un singur rezultat interesant, lema lui Borel—Lebesgue. Dar, traducînd ceea ce ştim despre limită într-un limbaj special, am văzut că apar în mod natural anumite noţiuni. Însă foarte important este că noţiunile de mulţime deschisă, vecinătate, compacitate, aderenţă etc. se pot defini într-un context mult mai general şi că, cu ajutorul acestor noţiuni, se vor putea stabili o serie de rezultate remarcabile.

Studiul mulţimilor de puncte de pe dreaptă, sau din plan, a constituit obiectul a numeroase lucrări, în primele decenii ale secolului nostru; cu ocazia introducerii noţiunii de măsură vom discuta unele chestiuni în această direcţie.

Noţiunea generală de spaţiu topologic

Aţi întîlnit în paginile precedente cuvintele *topologice*, *topologie*, dar ce înseamnă *topologie*? Cuvîntul, ca atîtea altele din terminologia ştiinţifică, provine din limba greacă, de la „topos“ = loc şi „logos“ = ştiinţă. Aceasta ar fi o lămurire de ordin etimologic, care însă nu ne spune prea mult.

B. Riemann, marele matematician german căruia i se datoresc atîtea căi noi în matematică, trebuie să fie considerat fondatorul topologiei, care, iniţial s-a numit şi Analysis Situs (terminologie astăzi complet abandonată). Să-i dăm cuvîntul:



Bernard Riemann
(1826—1866)

„În studiul funcţiilor care se obţin prin integrarea diferenţialelor exacte, cîteva teoreme de Analysis Situs sînt aproape indispensabile; sub acest nume...... este permis să desemnăm acea parte a teoriei mărimilor continue, care studiază aceste mărimi... , făcînd abstracţie de orice idee de măsură şi studiind doar rapoartele lor de poziţie şi de incluziune...". Acest punct de vedere general era explicitat şi mai mult în celebra sa lecţie inaugurală „Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei"*. Se poate spune că topologia studiază acele proprietăţi care sînt legate, nu de

* E. Georgely, *Ipotezele care stau la baza geometriei, de B. Riemann. Studii şi comentarii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

distanțe, ci care sînt invariante la transformări bicontinue. Noțiunea generală de spațiu topologic, așa cum o întrevăzuse Riemann, va apărea însă mai tîrziu; trebuiau degajate noțiunile în cazurile cele mai simple. În cazul spațiului euclidian, G. Cantor este acela care definește primul noțiunile de mulțime deschisă, mulțime închisă, punct de acumulare și altele. Cantor nu se mărginește să dea definiții, el determină (în cazul dreptei) și proprietăți importante ale structurii acestor mulțimi.

Deși privite cu oarecare neîncredere de lumea matematicienilor, rezultatele lui Cantor referitoare la mulțimile de puncte de pe dreaptă au fost aplicate de școlile franceză și germană de teoria funcțiilor. La sfîrșitul secolului al XIX-lea apare tot mai insistentă ideea de a încerca aplicarea teoriei mulțimilor nu numai mulțimilor de puncte, ci și familiilor de funcții, deși B. Riemann a fost acela care, încercînd să demonstreze principiul lui Dirichlet, a considerat, cu ani mai înainte, spații de funcții.

O trecere în revistă, chiar succintă, a modului în care, ca urmare a lucrărilor lui D. Hilbert, M. Fréchet, F. Riesz, s-a degajat noțiunea generală de spațiu topologic, ne-ar duce prea departe. Să ne mărginim însă să amintim rolul important pe care l-a avut asupra mentalității matematice a epocii (începutul secolului nostru) apariția metodei axiomatice, ilustrată magistral de D. Hilbert în *Fundamentele geometriei**.

Luînd din axiomele lui Hilbert, referitoare la vecinătățile din plan, pe cele care erau susceptibile să dea teoriei generalitatea și precizia cea mai mare, F. Hausdorff definește noțiunea de spațiu topologic așa cum (cu mici modificări de detaliu) o folosim și astăzi. Bineînțeles, de la apariția cărții lui Hausdorff, din 1914**, au apărut multe fapte noi, s-au precizat noțiuni, au apărut altele. Cadrul general era însă dat.

---

* D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner Verlag, Leipzig, 1899.

** F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914.

Ce este un spaţiu topologic? Prin definiţie, un spaţiu topologic este un cuplu alcătuit de o mulţime E şi o familie de părţi ale lui E, notată cu $\mathcal{G}$, care trebuie să verifice următoarele proprietăţi:

1) mulţimea E aparţine lui $\mathcal{G}$, la fel şi mulţimea vidă $\emptyset$;

2) reuniunea oricărei familii de elemente din $\mathcal{G}$ aparţine lui $\mathcal{G}$;

3) intersecţia oricărei familii *finite* de mulţimi din $\mathcal{G}$ aparţine lui $\mathcal{G}$.

Mulţimile din $\mathcal{G}$ se numesc mulţimi deschise. A da pe E o familie cu aceste proprietăţi înseamnă a introduce pe E o *structură topologică*, sau, pe scurt o topologie. Vom nota deseori structurile topologice prin literele greceşti τ, σ etc. Remarcaţi că de proprietăţile 1), 2), 3), se bucură şi familia mulţimilor deschise de pe dreaptă.

Proprietăţile impuse lui $\mathcal{G}$ sînt „modelate" după proprietăţile mulţimilor deschise din spaţiul euclidian.

Orice mulţime care este complementara unei mulţimi deschise se numeşte mulţime închisă. O vecinătate a unui punct x este o mulţime care conţine o mulţime deschisă ce conţine pe x. Mulţimea E se numeşte spaţiu total, iar elementele sale — puncte. O axiomă care se impune adesea spaţiilor topologice este următoarea: dacă x şi y sînt două puncte distincte din E, există două vecinătăţi U şi V ale lui x şi y, astfel încît $V \cap U = \emptyset$. Această axiomă se numeşte axioma lui Hausdorff şi un spaţiu care o verifică se numeşte spaţiu Hausdorff, sau spaţiu separat. Am văzut că dreapta reală verifică această axiomă, dar în general ea trebuie impusă, căci nu rezultă din condiţiile 1),2),3)*.

Aderenţa unei mulţimi A, notată cu $\bar{A}$, va fi definită ca cea mai mică mulţime închisă ce conţine pe A (cea mai mică: dacă B este altă mulţime închisă, cu $B \supset A$, atunci $\bar{A} \subset B$). Existenta pentru orice A a unei astfel de mulţimi rezultă astfel: $\bar{A}$ va fi intersecţia tuturor mulţimilor închise

* Se consideră adesea şi spaţii topologice, care nu verifică proprietatea de separare, dar vom presupune întotdeauna verificată această axiomă.

B ce conţin pe A ; cum spaţiul total E este o mulţime închisă (căci, din 1) $\emptyset \in \mathcal{G}$, deci $C\emptyset = E$ va fi închisă), există cel puţin o mulţime închisă care să-l includă pe A, de unde rezultă existenţa. În particular, $\bar{A} = A$ înseamnă că A este închisă şi reciproc.

Definiţia dată aderenţei unei mulţimi în cazul dreptei era puţin diferită: anume, punctul $x_0 \in \bar{A}$ dacă, pentru orice vecinătate V a lui x_0, există cel puţin un x (eventual chiar x_0) care să aparţină lui $A \cap V$.

Să arătăm, pe cazul general, echivalenţa acestor două condiţii, ceea ce este un exerciţiu simplu, dar reprezentativ, al modului de raţionament axiomatic. Înainte de aceasta, o remarcă: a spune că o mulţime B este deschisă, echivalează cu a afirma că B este o vecinătate pentru orice punct al ei. Una din implicaţii rezultă direct din definiţie: B deschisă este o vecinătate a oricărui punct al ei. Reciproc, dacă, pentru orice $y \in B$, B este o vecinătate, atunci rezultă că, pentru orice y, există o mulţime deschisă U_y, cu $y \in U_y$, şi $U_y \subset B$. Dar atunci $B = \bigcup_{y \in B} U_y$ şi cum fiecare U_y este deschisă, din 2) rezultă că B este deschisă.

Iată acum echivalenţa celor două definiţii ale aderenţei: Fie* $\bar{A} = \bigcap_{B \supset A} B$, fiecare B fiind închis. Atunci $C\bar{A} = \bigcup_{CB \subset CA} CB$, fiecare CB fiind deschisă. Deci o condiţie necesară şi suficientă ca un punct y să aparţină lui $C\bar{A}$, va fi ca y să aparţină unui CB. CB este o vecinătate a lui y şi deci $CB \subset CA$. Prin urmare există o vecinătate a lui y (chiar CB de pildă) care, fiind inclusă în CA, *nu conţine puncte ale lui* A. Deci, negînd această proprietate, obţinem o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un punct y să nu aparţină lui $C\bar{A}$, adică să aparţină lui $\bar{A}$. Dar ce ne furnizează negarea? Orice *vecinătate* V a lui y conţine cel puţin un punct din A, q.e.d.

---

* Prin „$\bigcap_{B \supset A} B$, B închis" se notează mulţimea elementelor ce aparţin tuturor acelor mulţimi închise B, care verifică condiţia $A \subset B$.

Compacitatea se va defini exact ca în cazul lui R: anume, un spaţiu topologic E este compact, dacă este separat şi dacă din orice acoperire a lui E cu mulţimi deschise se poate extrage o acoperire finită.

Trecînd la complementare, se obţine următoarea condiţie echivalentă: dacă orice familie de mulţimi închise, cu intersecţia vidă*, conţine o subfamilie finită de mulţimi a căror intersecţie să fie vidă, atunci E este compact. În mod evident, această ultimă condiţie este, la rîndul ei, echivalentă cu următoarea: dacă orice familie de mulţimi închise, cu proprietatea că orice subfamilie finită a sa are intersecţia nevidă, are ea înseşi intersecţia nevidă, atunci spaţiul E este compact.

Pe o mulţime E se poate introduce o topologie plecînd nu direct de la mulţimi deschise, ci de la o familie arbitrară de părţi ale lui E.

Fie $\mathfrak{F}$ această familie. Dacă notăm cu $\mathcal{G}(\mathfrak{F})$ familia cea mai mică cu următoarele două proprietăţi: a) $\mathfrak{F} \subset \mathcal{G}(\mathfrak{F})$, b) $\mathcal{G}(\mathfrak{F})$ verifică proprietăţile 1), 2), 3) ale familiei mulţimilor deschise, atunci se spune că $\mathfrak{F}$ este o subbază a topologiei definite de $\mathcal{G}(\mathfrak{F})$. Este uşor de văzut că elementele lui $\mathcal{G}(\mathfrak{F})$ sînt reuniuni arbitrare de intersecţii finite de mulţimi din $\mathfrak{F}$. În particular, dacă elementele lui $\mathfrak{F}$ sînt mulţimile reduse la cîte un punct y, cu y parcurgînd pe E, se obţine aşa-numita topologie discretă.

Se spune că $\mathfrak{F}$ este o bază, dacă orice element din $\mathcal{G}(\mathfrak{F})$ este o reuniune de mulţimi din $\mathfrak{F}$. Vom avea de mai multe ori prilejul să definim o topologie în acest mod, ceea ce, uneori, este mai comod decît definirea directă a mulţimilor deschise. Chiar în cazul dreptei reale, singurul exemplu pe care-l avem deocamdată la îndemînă, mulţimile deschise, au fost definite, plecînd de la intervale, ca reuniuni de intervale. În particular, se poate defini o topologie pe

---

* Se spune că o familie $\mathfrak{F}$ de mulţimi este cu intersecţie vidă, dacă $\bigcap_{B \in \mathfrak{F}} B = \emptyset$, unde prin $\bigcap_{B \in \mathfrak{F}} B$ s-a notat mulţimea acelor elemente care aparţin tuturor mulţimilor familiei $\mathfrak{F}$.

o mulțime atașînd fiecărui punct o familie de mulțimi care să-l conțină și care să se bucure de cîteva proprietăți naturale, vecinătățile sale, și să definească apoi mulțimile deschise.

Pe aceeași mulțime se pot defini în general mai multe topologii (exceptăm cazurile banale, ca mulțimile reduse la un singur punct), schimbînd familia $\mathcal{G}$ a mulțimilor deschise. Dacă pe E avem date două topologii, ale căror mulțimi deschise sînt respectiv G_1 și G_2, și dacă $G_1 \subset G_2$, se spune că topologia definită de G_2 este mai fină decît cea definită de G_1. În general însă, fiind date două topologii peste un același spațiu, ele nu sînt comparabile. Cîteva cuvinte despre topologiile induse: dacă $(E, \mathcal{G})$ este un spațiu topologic și F o submulțime a sa, atunci se poate introduce pe F o topologie considerînd familia $\mathcal{G}_F$ a tuturor mulțimilor de forma $F \cap G$ cu $G \in \mathcal{G}$. Se verifică imediat că $\mathcal{G}_F$ îndeplinește condițiile 1), 2), 3), deci că pe F s-a introdus într-adevăr o topologie. Dacă spațiul topologic astfel obținut este compact, se spune că mulțimea F este compactă. În particular, ea verifică teorema lui Borel-Lebesgue.

În legătură cu compararea topologiilor, menționăm un fapt interesant: dacă pe un spațiu compact E se consideră o altă topologie separată, mai puțin fină decît topologia compactă, cele două topologii coincid.

Un alt exemplu simplu de spațiu topologic poate fi furnizat de plan. Dacă fiecărui punct îi asociem discuri centrate în acel punct, de rază din ce în ce mai mică, aceste discuri vor juca rolul intervalelor deschise de pe dreaptă. Mulțimile deschise vor fi acele mulțimi în care fiecare punct are o vecinătate, deci un mic disc, complet inclus în mulțimea respectivă; mulțimile compacte vor fi iarăși mulțimi închise și mărginite (mărginit înseamnă: poate fi inclus într-un disc cu o rază suficient de mare). Am ales discurile ca sistem fundamental de vecinătăți, dar tot atît de bine am fi putut alege pătrate cu laturi oricît de mici, sau triunghiuri. Mulțimile deschise ar fi fost aceleași (puteți încerca să verificați acest lucru). Dacă considerăm dreapta ca o submulțime a planului, și pe plan topologia indicată, topologia de pe

dreaptă indusă de cea din plan va fi exact cea pe care am studiat-o mai înainte. Un alt exemplu de spaţiu topologic, cu topologia indusă de spaţiul ambiant, va fi cercul, sau sfera din spaţiul cu trei dimensiuni; aceste spaţii au însă următoarea proprietate: ele sînt local euclidiene, adică fiecare punct are o vecinătate în care topologia „se aseamănă perfect“ cu cea euclidiană. Studiul unor astfel de spaţii (şi ale altora mai complicate, dar cu acelaşi caracter local euclidian) este obiectul teoriei varietăţilor de care însă nu ne vom ocupa de loc, cu tot interesul foarte mare de care se bucură.

Există însă spaţii topologice care prezintă tot felul de patologii ce nu seamănă cîtuşi de puţin cu dreapta sau planul, nici măcar local, de pildă spaţii în care orice mulţime deschisă este simultan şi închisă. Aşa se întîmplă aproape totdeauna: o definiţie generală ascunde în ea posibilităţi pe care doar studiul atent le scoate la iveală. Aşa a fost cazul şi cu noţiunea de funcţie în general, cu cea de funcţie continuă, cu noţiunea de curbă, de arie etc.

Totuşi matematica are nevoie de definiţii generale, pentru că altfel n-ar putea cuprinde multe fapte care apar, în mod natural, pe parcursul dezvoltării sale.

FUNCȚII

Noțiunea generală de funcție

Deşi diferite exemple de dependență funcțională erau cunoscute încă de pe vremea egiptenilor (de pildă faptul că lungimea unui cerc este de π ori diametrul lui), deşi în antichitate erau alcătuite chiar tabele de funcții trigonometrice, necesare în astronomie, noțiunea generală de funcție s-a degajat tîrziu. Funcțiile trigonometrice, logaritmii, apoi funcțiile algebrice, funcția exponențială, au fost tot atîtea exemple de funcții pe care analiştii secolului al XVII-lea le-au studiat în amănunt şi pe care şi-au încercat valoarea noilor „instrumente", atunci descoperite, derivarea şi integrarea. Dar lipsea noțiunea generală, o definiție precisă care să înglobeze toate cazurile cunoscute. Se poate chiar spune că vechii analişti îşi făceau unele iluzii, parte din ele destrămate tîrziu, abia în secolul al XIX-lea. Pentru Isaac Newton funcția era o cantitate ce varia în timp, „o fluentă" în terminologia sa. De abia J. Bernoulli introduce termenul de „funcție". Dezvoltarea calculului infinitezimal arată însă că timpul (în afara problemelor de cinematică) nu joacă nici un rol deosebit. Pentru J. Bernoulli o funcție de o mărime variabilă este o cantitate compusă într-un anumit fel din această mărime variabilă şi constante, iar pentru L. Euler, ceva mai tîrziu, o funcție era o expresie analitică obținută combinînd într-un mod oarecare variabilele şi constantele. Deci, pînă la Cauchy, o „funcție arbitrară" va fi dată de o expresie analitică. Problema corzii vibrante, rezolvată de Daniel Bernoulli prin separarea variabilelor, a făcut să apară, pentru prima dată, o funcție reprezentată printr-o serie trigonometrică. Soluția lui D. Bernoulli, obținută în 1753, a dat naştere unei dispute aprige. Într-adevăr, în 1747, d'Alembert dăduse o soluție complet diferită, precizată în 1748 de Euler.



Daniel Bernoulli
(1700—1782)

Despre ce era vorba? Se punea problema determinării vibraţiilor transversale ale unei corzi omogene, de lungime l, fixată la ambele capete, aceste vibraţii studiindu-se în funcţie de timp. Din punct de vedere matematic, aceasta revenea la a rezolva ecuaţia $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, a fiind o constantă (ce depinde de densitatea corzii), planul (x,y) fiind planul în care au loc vibraţiile, iar $y = y(t,x)$ elongaţia corzii. D'Alembert a găsit că soluţia problemei este dată de $y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x)$, unde φ este o funcţie arbitrară de perioada $2l$. Euler a remarcat apoi că vibraţiile sînt determinate de viteza şi de forma corzii în momentul iniţial. Metoda utilizată de d'Alembert era cea cunoscută astăzi sub denumirea de metoda reducerii la forma canonică a ecuaţiei, sau metoda caracteristicilor.

D. Bernoulli a procedat însă complet diferit. Ghidat de analogii fizice, el a afirmat că orice soluţie a ecuaţiei

corzii vibrante se poate obține ca o suprapunere de soluții particulare. Bernoulli a utilizat ceea ce se numește astăzi metoda funcțiilor proprii. Aceste soluții particulare sînt ușor de găsit și sînt date de funcții trigonometrice. Deci, a conchis Bernoulli, orice soluție va fi de forma

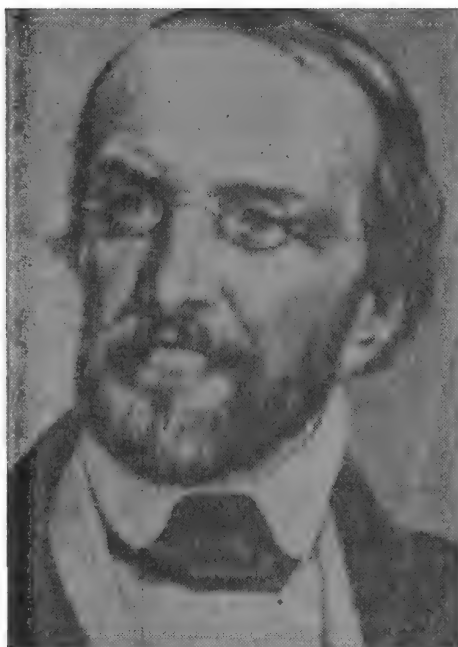
$$\sum a_n \sin \frac{n\pi}{l} \cos (t - \beta_n),$$

cu a_n constante. Desigur problema convergenței nu preocupa încă pe nimeni în mod serios. Însă ceea ce a declanșat disputa a fost faptul următor: dacă facem pe $t = 0$, obținem forma corzii în momentul inițial; deci, notînd cu $f(x)$ elongația în momentul $t = 0$, din soluția lui Bernoulli rezulta că

$$f(x) = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} \beta_n.$$

Dar experiența arată că, în momentul inițial, o coardă poate fi, de pildă, o linie poligonală. Și tocmai acest lucru îl deranja pe Euler: el nu concepea ca o astfel de linie să poată fi reprezentată printr-o expresie analitică. Disputa a angajat mulți matematicieni, între care pe Lagrange.

Începînd din 1807 lucrările matematicianului francez J. Fourier, ale căror rezultate sînt expuse în *Théorie analytique de la Chaleur*, apărută în 1822, conduc la noi progrese. Fourier regăsește forma coeficienților Fourier ai unor funcții (coeficienți calculați mai înainte de Euler), dar afirmă că, dată fiind o funcție arbitrară, formulele acestea conduc la o serie trigonometrică a cărei sumă este funcția dată. Fourier dă numeroase aplicații ale acestei ipoteze, care coincid cu rezultatele experienței. Dar ipoteza nu era demonstrată! Cei mai mari matematicieni ai timpului au atacat această problemă. Nu vom insista asupra rezultatelor obținute privind seriile Fourier, ci vom remarca că venise momentul de a se preciza noțiunea de funcție arbitrară, și că, după cum remarca marele matematician Lejeune Dirichlet, venise momentul „să se substituie ideile calculului". În această epocă, prima jumătate a secolului al



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805—1859)

XIX-lea, se pun bazele riguroase ale analizei matematice (deşi, după cum am văzut mai înainte, o definiţie riguroasă a numerelor reale lipsea încă). Saltul produs în evoluţia noţiunii de funcţie constă în faptul că atît Cauchy, cît mai ales Riemann, concepeau funcţia independent de reprezentarea ei analitică. Anume, fiecărei valori a variabilei x îi corespunde, în mod bine determinat, o valoare y; acesta este, în esenţă, punctul de vedere modern.

O definiţie atît de generală permitea funcţiilor, cel puţin în aparenţă, o libertate extremă; şi multă vreme matematicienii au crezut că va fi imposibil de stabilit proprietăţi generale ale tuturor funcţiilor arbitrare.

Dar să dăm mai întîi definiţia funcţiei. Vom folosi uneori termenul echivalent „aplicaţie". O funcţie este o

corespondență care atașează fiecărui element dintr-o mulțime X un element din altă mulțime. Cu alte cuvinte, pentru a putea defini o funcție este necesar următorul triplet: o mulțime X pe care este definită funcția („domeniul de definiție"), o mulțime Y (care poate de altfel coincide cu X) în care se află valorile pe care le ia funcția, și o regulă, s-o notăm cu $f : x \to y = f(x)$, care asociază fiecărui x din X un element y din Y. În ceea ce privește mulțimile X și Y, nu se face *apriori* nici o ipoteză. În acest context general nu se pot spune decît banalități referitoare la proprietățile generale ale tuturor funcțiilor. De îndată însă ce fixăm domeniul de definiție și domeniul valorilor, situația se schimbă. În analiza matematică s-au obținut surprinzător de multe proprietăți generale ale funcțiilor definite pe numerele reale, cu valori reale*. Oricît de interesante ar fi rezultatele generale (unele dintre ele sînt extrem de interesante), totuși aplicabilitatea lor este uneori destul de limitată.

Întorcîndu-ne la definiția generală a funcției, atragem atenția că considerarea unor domenii de definiție (și valori) chiar mai generale, nu a fost o generalizare făcută pur și simplu de dragul generalității, ci corespundea unei necesități, care va apărea, sperăm, evidentă pe parcursul capitolelor următoare.

Despre continuitate

Un loc central în analiză îl ocupă funcțiile continue. Avem cu toții o idee mai mult sau mai puțin intuitivă despre continuitate. În limbajul obișnuit aceasta înseamnă lipsa de salturi, lipsa de întreruperi. În mate-

* O interesantă discuție asupra acestei chestiuni se găsește în S. Marcus, *op. cit.* la Bibliografie, pp. 11—14.

matică ne trebuie o definiţie precisă şi, ca întotdeauna, definiţiile au un oarecare caracter tehnic.

Fie o funcţie reală f, definită pe o submulţime E a dreptei reale. Vom spune că f este continuă în punctul $x_0 \in E$, dacă pentru orice vecinătate V a punctului $f(x_0)$ găsim o vecinătate W a punctului x_0, astfel încît, pentru orice $x \in W \cap E$, să avem $f(x) \in V$. Pentru simplificare să presupunem că E este un interval (nu precizăm dacă este închis sau deschis). Atunci, explicitînd definiţia de mai sus, vedem că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît inegalitatea $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să atragă $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Este uşor de verificat că definiţia noastră coincide cu următoarea: f este continuă în x_0, dacă pentru orice şir x_n $(x_n \neq x_0)$ tinzînd către x_0, $f(x_n) = y_n$ tinde de asemenea către $f(x_0) = y_0$. În modul acesta, de la o definiţie ce se referea la vecinătăţi, am trecut la o definiţie în care apar doar şiruri. Oricum am proceda, intervine însă structura topologică, atît a domeniului de definiţie, cît şi a domeniului în care f îşi ia valorile.

Remarcaţi că nu am introdus încă noţiunea de limită a unei funcţii într-un punct. S-o facem. Vom spune că $\alpha = \lim f(x)$ cînd $x \to a$, dacă, pentru orice vecinătate V a lui α, există o vecinătate U a lui a, astfel încît $x \in U$ să implice $f(x) \in V$.

Noţiunea de continuitate are un caracter local. Prin aceasta înţelegem că, pentru o funcţie, a fi sau nu continuă într-un punct depinde exclusiv de valorile pe care le ia funcţia *într-o vecinătate* a punctului considerat. Există şi alte proprietăţi ce au de asemenea un caracter local, de pildă derivabilitatea; altele au însă un caracter global, adică se referă la comportarea funcţiei pe întreg intervalul ei de definiţie; un exemplu simplu îl oferă continuitatea uniformă. O funcţie poate fi continuă într-un punct x_0 şi discontinuă în puncte oricît de apropiate de x_0 şi, reciproc, continuă în orice punct diferit de un anume x_0 şi discontinuă în x_0 (bineînţeles, o funcţie este discontinuă într-un punct, dacă *nu este* continuă în acel punct).

Un exemplu clasic îl constituie funcția definită în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional sau zero,} \\ \frac{1}{q}, \text{ dacă } x = \frac{p}{q}. \end{cases}$$

Este evident că în orice punct rațional $\xi_0 = \frac{p}{q}$ (diferit de zero) funcția este discontinuă, căci în orice vecinătate a lui ξ_0 există puncte iraționale ξ în care f este nulă, deci în acele puncte ξ, diferența $f(\xi_0) - f(\xi) = \frac{1}{q}$ nu va putea fi făcută oricît de mică, oricît am restrînge vecinătatea lui ξ_0. Dar funcția noastră este continuă în orice punct irațional! Aceasta rezultă din faptul că dacă un șir de numere raționale este un șir Cauchy cu o infinitate de termeni distincți, numărătorii trebuie neapărat să crească nemărginit (dacă $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ și $a_m = \frac{p_m}{q_m}$, atunci $|a_n - a_m| = \frac{|p_n q_n - p_m q_m|}{q_n q_m}$, deci $\geqslant \frac{1}{|q_n q_m|}$; dacă $|q_n| \leqslant M$ pentru orice n, ar rezulta că $|a_n - a_m| \geqslant \frac{1}{M^2}$ pentru orice m și n, deci șirul n-ar mai fi Cauchy).

Iată deci o funcție discontinuă pe o mulțime numărabilă de puncte, mai mult, pe o mulțime *densă* (se spune că A este o mulțime densă în spațiul topologic B, dacă $\bar{A} = B$), dar continuă în restul punctelor.

Este ușor de construit o funcție continuă într-un singur punct și, încă și mai ușor de construit, o funcție discontinuă într-un singur punct. Să ne întoarcem la funcțiile continue pe întreg intervalul lor de definiție, pe care să-l presupunem *compact*. Atunci:

1) orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită;
2) orice funcție continuă pe un interval compact își atinge marginea inferioară și superioară;
3) orice funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă.

În enunţurile de mai sus se poate înlocui „interval compact" prin „mulţime compactă", însă condiţia de compacitate este esenţială. Dar să examinăm puţin enunţul. Mai întîi, ce este o funcţie mărginită? Aceasta înseamnă că mulţimea valorilor sale (notată cu $f(X)$, dacă X este domeniul de definiţie) este mărginită. Cum $f(X)$ este, în cazul de faţă, o mulţime de numere, ştim ce înseamnă aceasta. În al doilea rînd, presupunînd că $f(X)$ este o mulţime mărginită (ceea ce revine la faptul că există un interval $[m,M]$ cu proprietatea că $f(X)\subset[m,M]$), marginea superioară, respectiv inferioară, a mulţimii $f(X)$ va fi cel mai mic M, respectiv cel mai mare număr m, astfel ca $f(X)\subset[m,M]$*.

A spune că funcţia f îşi atinge marginile, înseamnă deci a afirma că atît M cît şi m aparţin lui $f(X)$.

Dar ambele enunţuri 1) şi 2) pot fi strînse într-un singur caz particular al propoziţiei următoare: *imaginea unui compact printr-o funcţie continuă este un compact.*

Cu această ocazie vom introduce notaţia următoare: dacă $f : X\to Y$, atunci pentru orice $Z\subset Y$, $f^{-1}(Z)$ este mulţimea acelor x cu proprietatea că $f(x)\in Z$. Aceasta se va nota şi astfel: $f^{-1}(Z) = \{x\mid f(x)\in Z\}$. Dacă f este definită şi continuă pe X, atunci din definiţia continuităţii rezultă că, pentru orice mulţime deschisă U, $f^{-1}(U)$ va fi o mulţime deschisă (şi, trecînd la complementare, pentru orice mulţime închisă F, $f^{-1}(F)$ va rezulta închisă).

Fie acum K un compact inclus în domeniul de definiţie al funcţiei f şi fie $L = f(K)$. Să arătăm că L este compact. Fie deci o acoperire oarecare $\{U_\alpha\}$, a lui L, cu mulţimi deschise. Imaginea inversă a fiecărui U_α, $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, va fi o mulţime deschisă în virtutea continuităţii lui f, deci $\{V_\alpha\}$ constituie o acoperire deschisă a lui K; acesta fiind compact, se poate extrage o acoperire *finită*, $V_1,\ldots,V_n$. Dar atunci $U_1, \ldots, U_n$ va fi o acoperire finită a lui L, deci L este compact. E cazul să atragem atenţia că imaginea

* Definiţia este generală: fie A o mulţime pe dreaptă; M va fi marginea superioară a lui A, dacă $x\in A$ implică $x\leqslant M$ şi dacă orice M' cu aceeaşi proprietate este cel puţin egal cu M; schimbînd semnele inegalităţilor obţinem noţiunea de margine inferioară.

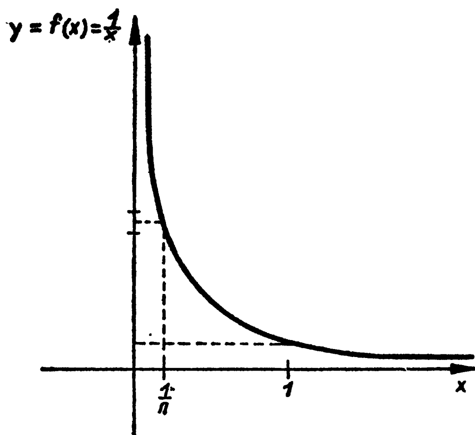


Fig. 1.

unei mulţimi deschise printr-o funcţie continuă nu este în mod necesar o mulţime deschisă, dar în cazul de faţă $U_\alpha = f(V_\alpha)$ erau presupuse deschise de la început. Să mai remarcăm că $f(f^{-1}(U)) = U$, oricare ar fi U, dar că $f^{-1}(f(V)) \subset V$, egalitatea neavînd loc în general (puteţi da o condiţie simplă care să asigure egalitatea?).

Afirmaţia referitoare la faptul că f îşi atinge marginile (teoremă demonstrată pentru prima dată de K. Weierstrass) rezultă din propoziţia demonstrată mai sus şi din faptul că o mulţime compactă (într-un spaţiu separat) este închisă.

Să trecem la punctul 3). Pentru a vedea mai bine ce este continuitatea uniformă, să dăm un exemplu simplu în care această proprietate (n-am definit-o încă!) *nu* este îndeplinită.

Pe intervalul deschis $I = (0,1)$, vom considera funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$. Evident, $f(x)$ este continuă pe I (fig. 1). Să luăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru fiecare punct x din $(0,1)$ există un $\delta_x(\varepsilon) > 0$, astfel încît, pentru orice $x' \in (x - \delta_x(\varepsilon), x + \delta_x(\varepsilon))$, să avem $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Altfel spus, inegalitatea $|x - x'| < \delta_x(\varepsilon)$ atrage $|f(x') - f(x)|$

$< \varepsilon$. Dar $\delta_x(\varepsilon)$ depinde de punctul x! Să luăm șirul $x_n = \frac{1}{n}$. Funcția noastră fiind foarte simplă, putem calcula pe $\delta_{\frac{1}{n}}(\varepsilon)$.

Ținînd seama de definiția lui $f(x)$, se găsește că $\delta_{\frac{1}{n}}(\varepsilon) < < \frac{\varepsilon}{n^2 - n}$, deci, cu cît ne apropiem de zero, $\delta_{\frac{1}{n}}(\varepsilon)$ tinde către zero (pentru un același ε). Ei bine, o funcție continuă pentru care nu se întîmplă un astfel de fenomen, se numește uniform continuă. Mai precis, funcția $f(x)$, definită pe un interval I al dreptei reale, este uniform continuă pe I, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît din $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$ să rezulte $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Această definiție nu spune altceva decît că numărul $\delta(\varepsilon) = \inf_x \delta_x(\varepsilon)$ este pozitiv, ceea ce nu avea loc în exemplul studiat mai înainte.

Să trecem la demonstrația punctului 3) („Orice funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă"). Vom proceda prin absurd, dar mai înainte vom demonstra o altă proprietate referitoare la mulțimile compacte de pe dreaptă: dacă C este o mulțime compactă pe dreaptă, atunci din orice șir infinit $\{a_n\} \subset C$ se poate extrage un subșir convergent $\{a_{n_k}\}$ (a cărui limită aparține desigur lui C, întrucît, după cum știm ,C este închisă).

Aceasta se arată astfel. Notăm cu F_n închiderea mulțimii $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Atunci $U_n = CF_n$ va fi o mulțime deschisă. Să presupunem că $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ este vidă (deci nu există nici un punct a care să aparțină simultan tuturor mulțimilor F_n). Dar atunci U_n este o acoperire deschisă a lui C, deci există un număr finit de mulțimi U_n care acoperă pe C, să zicem $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}$; dar $\bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i} \supset C$ implică $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots \cap F_{n_k} = \emptyset$ $(i = 1, \ldots, k)$, ceea ce este absurd,

căci, pentru $n > \max(n_1, \ldots, n_k)$, F_n este inclus în fiecare F_{n_i}, iar F_n nu este vidă pentru nici un n.

Prin urmare există cel puțin un $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Să explicităm aceasta: $a \in F_n$ pentru orice n, deci pentru orice n și orice vecinătate a lui n există un element, din acea vecinătate, care aparține mulțimii $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Acum intervine un fapt suplimentar, anume că fiecare punct de pe dreaptă are un sistem fundamental numărabil de vecinătăți!

Fie V_n, $n = 1,2, \ldots$, un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului a; în V_1 există un element, notat a_{n_1}, care aparține mulțimii $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. În V_2 găsim un element a_{n_2} care să aparțină mulțimii $\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$ (deci $a_{n_2} \neq a_{n_1}$). Apoi, în V_3 există un a_{n_3} care aparține lui $\{a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \ldots\}$ ș.a.m.d.

Este evident că șirul $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ tinde către a, deci proprietatea este demonstrată.

Observăm că, de fapt, în demonstrație a intervenit doar faptul că C este compactă și că fiecare punct al dreptei are un sistem fundamental de vecinătăți numărabil. Deci demonstrația va fi valabilă și în orice spațiu topologic cu această ultimă proprietate.

În sfîrșit sîntem în măsură să probăm punctul 3). După cum s-a spus, vom proceda prin absurd. Dacă $f(x)$, definită și continuă pe compactul C, n-ar fi uniform continuă, aceasta ar însemna că există un număr real $\alpha > 0$ și două șiruri de numere $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, astfel încît $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ și $|f(a_n) - f(b_n)| > \alpha$. Cum C este compactă, se poate extrage din $\{a_n\}$ un subșir convergent $\{a_{n_k}\}$; bineînțeles că subșirul corespunzător $\{b_{n_k}\}$ va fi și el convergent și că ambele șiruri vor avea o limită comună $a \in C$. Dar $f(x)$ este continuă în punctul a; pentru n suficient de mare, $|f(a_n) - f(b_n)| \leqslant \leqslant |f(a_n) - f(a)| + |f(a) - f(b_n)|$ implică $|f(a_n) - f(b_n)| <$

$<\varepsilon$, ε fiind un număr pozitiv arbitrar; luînd $\varepsilon<\alpha$ ajungem la o contradicţie, q.e.d.

Desigur există funcţii uniform continue pe intervale necompacte, dar exemplul precedent (şi multe altele) ne arată că *în general* proprietatea nu este adevărată.

Demonstraţia dată a făcut în mod esenţial uz de distanţă, adică de faptul că pe dreaptă avem o distanţă între punctele x şi y, $d(x,y)$ fiind desigur $|x-y|$. Acest lucru arată că proprietatea noastră se poate generaliza şi pentru funcţii definite şi cu valori în spaţii topologice pe care se poate introduce o distanţă.

A patra proprietate importantă a funcţiilor continue este de altă natură: anume, dacă f este continuă pe un interval şi are valori reale, ea se bucură de aşa-numita continuitate Darboux. Prin aceasta se înţelege următoarea proprietate: dacă $f(x)$ are în punctul $a\in I$ valoarea A şi în $b\in I$ valoarea B, atunci pe intervalul (a,b) ea va lua orice valoare cuprinsă între A şi B. Cu alte cuvinte, dacă presupunem că $A<B$ (trebuie să facem o alegere), atunci pentru orice $C\in(A,B)$ există un punct $c\in(a,b)$, astfel încît $f(c)=C$. Proprietatea unei funcţii continue de a fi continuă Darboux, a fost folosită de Gauss (în cazul polinoamelor) la demonstrarea teoremei fundamentale a algebrei şi se pare că se datoreşte matematicianului Bolzano. Darboux a arătat că există şi alte funcţii (funcţii derivate) care (fără a fi neapărat continue) se bucură de această proprietate. De fapt se pot construi destul de simplu funcţii *discontinue în fiecare punct*, care să posede proprietatea lui Darboux.

Dar să ne întoarcem la funcţiile continue. Proprietatea lui Darboux este legată de faptul că se consideră funcţii definite pe intervale, deci pe mulţimi conexe, şi proprietatea pe care o avem în vedere se poate formula astfel: imaginea unei mulţimi conexe, printr-o funcţie continuă, este de asemenea conexă. Ce este o mulţime conexă? Vom spune că un spaţiu topologic este conex, dacă el nu conţine alte mulţimi simultan închise şi deschise în afara lui E şi a mulţimii vide $\emptyset$. Aceasta revine la faptul că nu există două mulţimi nevide A şi B, ambele deschise, $A\cup B=$

$= E$, $A \cap B = \emptyset$. O mulţime C a unui spaţiu topologic este conexă, dacă considerată ca spaţiu topologic (faţă de topologia indusă) este conexă. Intuitiv, o mulţime conexă înseamnă o mulţime care nu este „constituită din bucăţi" distincte. Se arată uşor că pe dreapta reală singurele mulţimi conexe sînt intervalele (mărginite sau nemărginite). Ca atare, în cazul dreptei reale, enunţul *dacă f este continuă, ea transformă mulţimile conexe în mulţimi conexe* nu aduce nimic nou; dar desigur că lucrurile se schimbă, dacă se consideră funcţii definite pe alte spaţii topologice, sau cu valori în alte spaţii (de pildă, dacă f, definită pe un interval al dreptei reale, ar lua valori complexe, proprietatea lui Darboux nici n-ar avea sens, dar proprietatea referitoare la conexiune rămîne !).

Demonstraţia se face astfel: fie A o mulţime conexă a dreptei, iar $f(A)$ imaginea sa. Dacă $f(A)$ n-ar fi conexă, $f(A)$ s-ar scrie ca reuniunea a două mulţimi nevide, M şi N, disjuncte, deschise în A. Dar atunci $A \cap f^{-1}(M)$ şi $f^{-1}(N) \cap A$ vor fi deschise în A, disjuncte şi nevide şi $A = (A \cap f^{-1}(M)) \cup (A \cap f^{-1}(N))$, deci A n-ar fi conexă, ceea ce este absurd.

Orice mulţime A conexă de pe dreaptă fiind un segment, $f(A)$ va fi conexă, conform teoremei, deci tot un segment. Prin urmare continuitatea Darboux a fost demonstrată. Remarcaţi că afirmaţia „f este continuă" ne-a asigurat că $f^{-1}(M)$ şi $f^{-1}(N)$ sînt deschise. Proprietatea lui Darboux poate fi uşor infirmată dacă domeniul de definiţie nu e conex.

Funcţii continue pe spaţii topologice

Necesitatea de a considera funcţii definite şi cu valori în spaţii topologice a fost impusă de numeroase probleme concrete. O dată cunoscute principalele proprietăţi ale spaţiilor topologice trecerea la studiul acestor func-

ții, în cazul proprietății simple pe care o avem în vedere, nu a ridicat probleme prea grele.

Dacă ați urmărit atent modul în care au fost expuse principalele proprietăți ale funcțiilor continue, rîndurile ce urmează nu prezintă nici o dificultate. Mai întîi, dacă $f: E \to F$ este o funcție definită pe un spațiu topologic E, cu valori în alt spațiu topologic F, se spune că f este continuă în punctul $p_0 \in E$, dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(p_0)$ există o vecinătate U a lui p_0, astfel încît $f(U) \subset V$. Dacă f este continuă în fiecare punct, avem următoarea proprietate: imaginea inversă a oricărei mulțimi deschise este deschisă. Altfel spus, dacă G este o mulțime deschisă în F, atunci $f^{-1}(G)$ (care, după cum știți, este mulțimea acelor $p \in E$ cu $f(p) \in G$) este deschisă, ceea ce rezultă direct din definiție. Ținînd seama de formula $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, luînd A o mulțime deschisă și $B = CA$, se găsește că $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(CA) = E$. Acum, dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$; și cum $f^{-1}(A)$ este deschisă, va rezulta că $f^{-1}(CA) = Cf^{-1}(A)$, deci imaginea inversă oricărei mulțimi închise este închisă (f fiind presupusă continuă). Reciproc, orice funcție cu aceste proprietăți (echivalente) de a întoarce mulțimile închise (respectiv deschise) în mulțimi închise (respectiv deschise) este continuă.

Nu este însă adevărat că:

1) orice funcție continuă transformă mulțimile deschise în mulțimi deschise (i.e. U deschis, f continuă, *nu implică* că $f(U)$ este deschisă;

2) orice funcție continuă transformă mulțimile închise în mulțimi închise ((1) și 2) sînt evident echivalente);

3) imaginea inversă a unui compact printr-o funcție continuă nu este întotdeauna un compact.

Puteți încerca (cu funcții definite pe dreaptă, cu valori reale) să dați exemple în sprijinul acestor trei afirmații.

Proprietățile funcțiilor continue în acest context general sînt aceleași (și se demonstrează la fel) cu cele ale funcțiilor continue definite pe un interval. Mai precis, dacă se consideră funcții continue pe un compact, cu valori reale (sau complexe), ele sînt mărginite, își ating marginile etc.

În ceea ce privește continuitatea uniformă, condiția ca spațiul să fie compact este suficientă; demonstrația dată apela însă la o distanță ca un mijloc de a compara vecinătățile. De fapt în cazul spațiilor compacte (și ale altora) există această posibilitate, chiar dacă nu se poate introduce o distanță. Aceasta este însă legată de așa-numitele structuri uniforme, introduse de André Weil tocmai pentru acest scop, dar despre care nu vom vorbi. Deci demonstrația dată aici va fi valabilă doar în acele spații compacte în care se poate introduce o distanță.

Am văzut că proprietatea lui Darboux este legată de conexiune; bineînțeles că în alte spații decît dreapta reală, structura mulțimilor conexe poate fi mult mai complicată. Un exemplu cu totul elementar ne arată ce diferență mare există între cazul dreptei și al planului. Dacă îndepărtăm un punct de pe dreaptă, mulțimea rămasă nu mai este conexă, dar dacă facem aceeași operație în plan, ceea ce rămîne este conex (de ce?).

O dată introdusă noțiunea de funcție continuă pe un spațiu topologic, prin intermediul funcțiilor continue se pot da diferite procedee de a defini topologii pe unele mulțimi, plecînd de la spații care posedă deja o structură topologică.

Vom face mai întîi o observație foarte simplă: fie f o funcție definită pe o mulțime E pe care s-au dat două topologii τ_1 și τ_2, cu τ_1 mai fină decît τ_2 (aceasta se notează prin $\tau_1 \geqslant \tau_2$).

Dacă notăm cu $\mathcal{G}_1$ și $\mathcal{G}_2$ familiile mulțimilor deschise cu ajutorul cărora se definesc τ_1 și respectiv τ_2 și dacă f are valori într-un spațiu topologic F, atunci continuitatea lui f față de τ_2 implică continuitatea lui f față de τ_1. Aceasta rezultă banal din faptul că $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2$. Această observație o vom utiliza imediat la definirea așa-numitei topologii „slabe".

Să considerăm o mulțime E, o familie de funcții $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ definite pe E, cu valori într-un spațiu topologic F (de fapt, exact aceleași considerații ar fi valabile dacă fiecare f_α ar avea valorile într-un spațiu topologic F_α, pentru orice

α). Cum trebuie să arate o topologie pe E, astfel ca toate funcţiile f_α să fie continue? Ne vom mărgini la început la cazul unei singure funcţii f. Fie deci $f : E \to F$, F spaţiu topologic. Pentru ca f să fie continuă, este suficient (şi necesar) ca, pentru orice mulţime U deschisă din F, $f^{-1}(U)$ să fie deschisă în E. Familia mulţimilor deschise pe E va trebui să cuprindă toate mulţimile de forma $f^{-1}(U)$. Deci orice topologie pe E, pentru care f este continuă, trebuie să aibă ca mulţimi deschise mulţimile $f^{-1}(U)$, cu U deschis în F.

Este clar că familia tuturor reuniunilor (arbitrare) de intersecţii finite de mulţimi de forma $f^{-1}(U)$, U deschis, defineşte o topologie pe E şi că f este continuă faţă de această topologie cea mai puţin fină cu această proprietate.

Să ne întoarcem la cazul general; dacă τ_α este topologia cea mai puţin fină pentru care funcţia f_α este continuă, cea mai puţin fină topologie faţă de care *toate* funcţiile $f_{\alpha(\alpha \in I)}$ sînt continue, va fi topologia ale cărei mulţimi deschise sînt reuniunile arbitrare de intersecţii finite de mulţimi de forma $f_\alpha^{-1}(U)$, U deschis în F.

Dacă definim topologia dînd nu familia mulţimilor deschise, ci pentru fiecare punct vecinătăţile sale sau (ceea ce este suficient) un sistem fundamental de vecinătăţi, atunci topologia cea mai puţin fină, pentru care toate funcţiile f_α sînt continue (şi care se numeşte „topologia slabă" dată de $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$), va avea ca bază mulţimile de forma următoare: reuniuni arbitrare de intersecţii finite de mulţimi de forma $f_\alpha^{-1}(V)$, V parcurgînd toate sistemele fundamentale de vecinătăţi ale punctelor din F.

În modul acesta, avînd la dispoziţie un spaţiu topologic şi o familie de funcţii definite pe o mulţime arbitrară E cu valori în acel spaţiu, putem introduce pe E o structură de spaţiu topologic. Topologiile slabe astfel introduse joacă un rol deosebit în analiză, după cum vom vedea în capitolele următoare.

Ajunşi aici, putem să considerăm două exemple importante cărora li se aplică consideraţiile de pînă acum, anume spaţiile metrice şi spaţiile produs.

Mai întîi, avem nevoie de următoarea definiţie: fie X şi Y două mulţimi; produsul cartezian $X \times Y$ al acestor două mulţimi este mulţimea tuturor cuplurilor de forma (x,y), unde x este un element oarecare din X, iar y un element oarecare al lui Y. Aplicaţiile $(x,y) \to x$ şi $(x,y) \to y$ (de la $X \times Y$ în X şi, respectiv, în Y) se numesc proiecţiile produsului pe factorii săi (aţi ghicit că factorii vor fi X şi Y). Numele „cartezian" vine, desigur, de la Descartes, creatorul geometriei analitice. Cel mai intuitiv exemplu de produs cartezian ni-l oferă planul, considerat ca produsul a două drepte. Alt exemplu simplu este următorul: dacă luaţi drept X un cerc într-un plan şi drept Y o dreaptă perpendiculară pe acel plan, $X \times Y$ va fi cilindrul infinit de bază X. Dacă în loc de o dreaptă luaţi un segment, veţi găsi un cilindru finit.

Sîntem acum în măsură să definim noţiunea generală de distanţă. Aţi remarcat desigur că, în discuţia referitoare la proprietăţile funcţiilor continue pe spaţii topologice, am folosit, fără a-l defini, cuvîntul metrică, distanţă. A sosit momentul pentru a repara această omisiune.

Prin definiţie, o metrică (sau o distanţă; este acelaşi lucru) pe o mulţime X este o funcţie d, definită pe produsul cartezian $X \times X$, cu valori în R şi care verifică proprietăţile următoare:

(d_1) Pentru orice pereche x,y din X, $d(x,y) \geqslant 0$;

(d_2) $d(x,y) = 0$ este echivalent cu $x = y$;

(d_3) $d(x,y) = d(y,x)$ pentru orice $x,y \in X$) (proprietatea de simetrie;

(d_4) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (inegalitatea triunghiului).

Să presupunem că pe spaţiul X s-a dat o distanţă d. Atunci putem introduce pe X o topologie asociată distanţei d în modul următor: să notăm cu $B(x,r)$ mulţimea punctelor y care verifică condiţia $d(x,y) < r$, r fiind un număr pozitiv. O astfel de mulţime o vom numi (prin analogie cu cazul euclidian) *bilă deschisă* (dacă am fi cerut ca $d(x,y) \leqslant r$, am fi avut o bilă închisă), rezervînd numele de *sferă* mulţimii

$S(x,r) = \{y \mid d(x,y) = r\}$*. Punctul x se va numi centrul bilei (respectiv al sferei), iar r raza sa.

Este ușor de verificat că dacă definim o mulțime deschisă ca fiind o mulțime cu proprietatea: *pentru orice punct al ei există o bilă cu centrul în acel punct și de rază (nenulă) suficient de mică inclusă în mulțime*, atunci familia tuturor mulțimilor deschise definește o topologie.

În particular, din inegalitatea triunghiului (d_3) rezultă că orice bilă deschisă este o mulțime deschisă.

Ei bine, această topologie nu este altceva decît topologia slabă dată de funcțiile $(f_y)_{y \in x}$ definite astfel: $f_y(x) = d(x,y) : x \to d(x,y) \in R$, deci cu valori în spațiul topologic R, ceea ce se verifică numaidecît, explicitînd definiția topologiei slabe date de funcțiile $f_y(x) = d(x,y)$.

Înainte de a trece mai departe, să mai vedem cîteva chestiuni. Dacă avem o metrică, avem deci o topologie (care se poate reduce însă la cea discretă !). Însă, reciproc, dacă pe o mulțime E este definită o topologie, se poate să nu existe nici o metrică, care să inducă pe E topologia inițială. Aceasta se va întîmpla cu siguranță, dacă avem puncte în E, pentru care să nu existe sisteme fundamentale de vecinătăți numărabile; în analiză apar în mod natural astfel de spații. Un spațiu topologic pe care se poate introduce o metrică compatibilă cu topologia spațiului (i.e. astfel ca metrica să inducă exact topologia spațiului) se numește *metrizabil*. Se cunosc o serie întreagă de condiții care asigură metrizabilitatea unui spațiu. Dar, după cum vom vedea imediat, metrici diferite pot induce o aceeași topologie.

În altă ordine de idei, analogia formală cu spațiul euclidian nu trebuie să ne înșele. În spațiile metrice se pot ivi tot felul de patologii dintre care vom da cîteva exemple. Dar mai întîi cîteva exemple de distanțe.

Cel mai simplu exemplu este desigur distanța de pe dreapta reală, $d(x,y) = |x - y|$.

---

* S-a utilizat notația următoare: mulțimea elementelor y care verifică o proprietate P se notează $\{y \mid y \text{ are } P\}$. În cazul de față proprietatea P este: y se găsește la distanța r de x, i.e. $d(y, x) = r$.

Alt exemplu la fel de simplu este distanța euclidiană dintre două puncte P și Q din plan. Dacă P are coordonatele (x_1,y_1) și Q (x_2,y_2), atunci, după cum se știe, $d(x,y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$. Dar în plan putem să considerăm funcția $d_1(P,Q) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$. Verifică d_1 proprietățile unei distanțe? Primele trei proprietăți sînt evident îndeplinite; inegalitatea triunghiului: $d_1(P,Q) \leqslant d(P,R) + d(R,Q)$ revine la $\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \leqslant \max(|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|) + \max(|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|)$, unde (x_3,y_3) sînt coordonatele punctului R (de altfel arbitrar); dar $|x_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$ și $|y_1 - y_2| \leqslant |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$, deci cel mai mare dintre numerele $|x_1 - x_2|$ și $|y_1 - y_2|$ (adică $d_1(R,Q)$) va fi mai mic decît cel mai mare din numerele $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$ și $|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ și, majorînd în continuare prin $d_1(P,Q) + d_1(R,Q)$, găsim că inegalitatea unghiului este verificată de $d_1(P,Q)$. Să vedem cum arată bilele și sferele lui d_1: de pildă dacă luăm $P = 0$, atunci $B(0,1)$ va fi interiorul unui pătrat centrat în origine, cu laturile de lungime 2, paralele cu axele; $S(0,1)$ va fi mulțimea punctelor situate pe laturile pătratului (fig. 2).

Dacă tot în planul R^2 considerăm metrica $d_2(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (verificați imediat că aceasta este o metrică), bilele, respectiv sferele, vor arăta altfel. În acest caz $B(0,1)$ va fi interiorul pătratului de latură 2 centrat în origine, ale cărui laturi formează cu axele

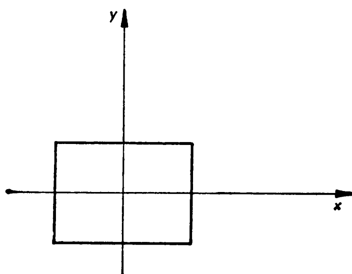


Fig. 2.

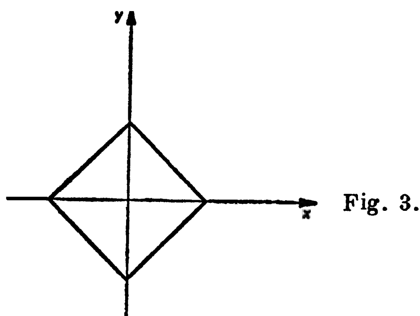


Fig. 3.

unghiuri de 45°, iar $S(0,1)$ va fi mulţimea punctelor situate pe laturile pătratului (fig. 3).

Vedeţi deci că, chiar în R^2, „sferele“ faţă de diferite metrici pot fi destul de diferite faţă de imaginea uzuală pe care o avem despre sferă.

Putem da exemple foarte simple care să arate că alte proprietăţi ale sferei euclidiene nu se păstrează.

Fie, de pildă, spaţiul topologic E ale cărui puncte sînt interiorul cercului (centrat în origine) de rază $\frac{1}{2}$ şi punctele de pe circumferinţa de rază 1, cu topologia indusă de topologia planului. Bilele $B(0,r)$, cu $r \leqslant \frac{1}{2}$ vor fi bilele uzuale. Dar

1) pentru $\frac{1}{2} < r_1 < r_2 < 1$, $B(0,r_1) = B(0,r_2)$; deci bile de raze diferite, centrate în acelaşi punct, pot fi identice;

2) aderenţele bilelor de forma $B(0,r)$ cu $r < \frac{1}{2}$ vor fi bilele închise $\{x \mid d(0,x) \leqslant r\}$, dar cea a bilei $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$ va fi exact $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Forma unei bile $B(x,r)$ cu $x \neq 0$ nu va fi întotdeauna interiorul unei sfere. De pildă, dacă x se găseşte pe circumferinţa $x = 1$, şi $r < \frac{1}{2}$, bila centrată în x se

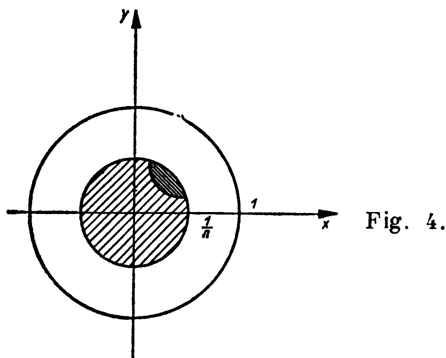


Fig. 4.

va reduce la un singur punct, la x. Dacă $r > \frac{1}{2}$ şi $|x| = 1$, atunci bila $B(x,r)$ va fi formată din punctul x şi din punctele din zona haşurată în fig. 4.

Alt fapt: închiderea bilei $B(0,1)$ nu va fi bila închisă $\{x \mid d(0,x) \leqslant 1\}$. Nici un punct de pe sfera $S(0,1)$ (în cazul nostru această mulţime se reduce la cercul $|x| = 1$) nu este aderent bilei $B(0,1)$! În sfîrşit, bila închisă, de rază 1, nu este conexă.

Acest exemplu foarte simplu ne arată că, în raţionamentele generale, intuiţiei noastre (care deseori este foarte utilă) trebuie să-i adăugăm multă rigoare.

Nu părăsim exemplele din spaţiul euclidian fără a observa un fapt important: metricile $d(x,y) = |x - y|$, $d_1(x,y) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$, $d_2(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ induc, toate, aceeaşi topologie.

Mai dăm două exemple de distanţe.

Fie E o mulţime oarecare şi să considerăm pe E mulţimea funcţiilor cu valori în R, mărginite pe E. Să notăm cu $B(E)$ această mulţime. Atunci pe $B(E)$ se poate introduce distanţa

$$d(f,g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| .$$

În modul acesta $B(E)$ devine un spaţiu metric, deci un spaţiu topologic. Am obţinut astfel un prim exemplu de

spaţiu de funcţii, adică de mulţime ale cărei elemente sînt funcţii.

Dacă, în particular, E este compact şi considerăm toate funcţiile continue pe E, atunci din proprietăţile funcţiilor continue rezultă că ele aparţin lui $B(E)$. Pe mulţimea $C(E)$ a funcţiilor continue pe E, metrica $d(f,g) = \sup | f(x) - g(x) |$ induce o structură de spaţiu metric, deci şi o structură de spaţiu topologic. Ne vom reîntîlni cu acest spaţiu în capitolele următoare.

Vom încheia consideraţiile noastre de topologie cu un exemplu foarte important de topologie slabă.

Am văzut ce este produsul cartezian a două mulţimi; evident, definiţia se poate generaliza la un număr finit de mulţimi.

Dacă avem o familie oarecare de indici I şi pentru orice $\alpha \in I$ avem o mulţime nevidă X_α, atunci produsul cartezian al mulţimilor X_α, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, se defineşte ca mulţimea tuturor funcţiilor p, definite pe I, astfel încît $p(\alpha) = x_\alpha$ să aparţină lui X_α pentru orice $\alpha \in I$.

Faptul că această mulţime nu este vidă rezultă din aşa-numita axiomă a alegerii* (axioma lui Zermelo). Această axiomă se poate formula în modul următor: dacă F este o funcţie definită pe D, ale cărei valori, pentru orice $x \in D$, sînt mulţimi nevide, atunci există o funcţie f definită pe D, cu proprietatea că $f(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in D$. În cazul nostru rolul lui D este jucat de I, iar valoarea lui F în punctul α va fi mulţimea X_α.

Este clar că definiţia generală pe care am dat-o coincide, în cazul a două (sau a unui număr finit) de mulţimi, cu cea indicată mai înainte.

Să presupunem acum că fiecare X_α este un spaţiu topologic. Se pune problema de a introduce pe $X = \prod X_\alpha$ o topologie. Aceasta se face considerînd proiecţiile lui X pe spaţiile X_α; p_α va fi funcţia care fiecărui element $x \in X$ îi va atribui „coordonata" sa x_α (altfel spus, ţinînd seama de

* A se vedea şi S. Marcus, *op. cit.* pp. 150–151, unde axioma alegerii este formulată puţin diferit (dar enunţurile sînt echivalente).

definiția lui X, fiecare element din X este o funcție definită pe mulțimea I a indicilor α. Proiecția pe X_α va fi aplicația care fiecărei funcții îi va face să corespundă valoarea sa în punctul α).

Topologia pe spațiul produs va fi topologia slabă definită de proiecțiile p_α. Explicitînd în acest caz mulțimile deschise, găsim că ele sînt reuniuni arbitrare de intersecții finite de mulțimi de forma $p^{-1}(U_\alpha)$, unde U_α este o mulțime deschisă arbitrară din X_α. O mulțime $p^{-1}(U_\alpha)$ va fi pur și simplu o mulțime de elemente $(x_\beta)_{\beta \in I}$, în care coordonatele x_β, cu $\beta \neq \alpha$, parcurg pe întreg X_β, iar coordonata x_α parcurge mulțimea deschisă U_α (din X_α). În acest caz este valabilă următoarea teoremă importantă, obținută de matematicianul sovietic A.N. Tihonov: dacă toate spațiile factor X_α sînt compacte, spațiul produs $X = \Pi X_\alpha$ este compact, și reciproc. Nu vom demonstra acest rezultat, dar îl vom utiliza.

Diferite clase de funcții

Dacă funcțiile continue prezintă un interes deosebit, nu trebuie să credem că doar ele polarizează interesul matematicii. În paginile următoare vom indica alte cîteva clase de funcții, unele mai largi, altele mai restrînse, decît clasa funcțiilor continue. Indicăm aceste exemple din două motive, mai întîi pentru a arăta cum anumite proprietăți structurale atrag altele (cîteodată surprinzătoare) și apoi pentru că în capitolele următoare vom avea efectiv nevoie de unele rezultate pe care la momentul potrivit dorim să le avem la îndemînă.

Mai tîrziu, într-un capitol special, vom studia funcțiile diferențiabile. În cele ce urmează vom vorbi despre funcții definite pe dreapta reală, cu valori reale. O primă clasă de funcții pe care o vom considera este *clasa funcțiilor monotone*.

Se spune că $f(x)$, definită pe (a,b) este nedescrescătoare, dacă pentru orice două puncte $x_1 < x_2$ din (a,b) avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Dacă semnul de inegalitate este strict, funcția se va numi crescătoare. Analog se definesc funcțiile necrescătoare, respectiv descrescătoare. O funcție necrescătoare, sau nedescrescătoare se zice că este monotonă.

Este clar că monotonia nu implică continuitatea în orice punct, dar funcțiile monotone nu pot fi „prea discontinue" în sensul următor: în orice punct al domeniului de definiție al funcției există atît limita la stînga, cît și limita la dreapta. S-ar putea desigur ca aceste limite să nu fie egale (în care caz funcția este discontinuă), dar ele există; ca atare, o funcție monotonă nu are decît ceea ce se cheamă „discontinuități de prima speță", (spre deosebire de alte funcții discontinue pentru care limita la dreapta sau la stînga, sau ambele, nu există).

Monotonia unei funcții pe un interval compact atrage mărginirea ei ($f(x)$ va fi cuprinsă între valorile pe care le ia la extremitățile intervalului). Proprietatea este falsă dacă intervalul nu este compact: este suficient să reluăm exemplul $f(x) = \frac{1}{x}$ pe $(0,1)$, dar puteți să fabricați oricîte exemple doriți de acest fel.

De aici rezultă imediat că o funcție monotonă nu poate fi discontinuă decît cel mult într-o mulțime infinită numărabilă de puncte. Raționăm astfel: să presupunem, pentru a fixa ideile, că f este crescătoare și să considerăm „salturile" funcției în punctele de discontinuitate x_0 : $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ (am notat cu $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$) și știm că aceste limite există (n-am demonstrat, dar am afirmat acest lucru; e un bun exercițiu să faceți demonstrația). În fiecare punct de discontinuitate x_0, $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$; fiecărui astfel de punct să-i asociem un număr rațional $r(x_0)$ care să verifice relația

$$f(x_0 - 0) < r(x_0) < f(x_0 + 0).$$

Aceasta este posibil. Acum, dacă x_1 este alt punct de discontinuitate, atunci $r(x_0) \neq r(x_1)$ (din cauza monotoniei lui f). Am stabilit astfel o aplicaţie de la mulţimea punctelor de discontinuitate a lui $f(x)$ într-o submulţime a numerelor raţionale (numerele de forma $r(x)$) şi aplicaţia este biunivocă, de unde rezultatul.

Acesta este un rezultat simplu. O teoremă importantă a lui H. Lebesgue dă informaţii asupra *derivabilităţii* funcţiilor monotone. Anume, mulţimea punctelor în care o funcţie monotonă nu este derivabilă are măsura Lebesgue nulă. Cu alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$, mulţimea punctelor în care o funcţie monotonă dată nu este derivabilă, poate fi acoperită prin intervale cu proprietatea că suma lungimilor acestor intervale nu depăşeşte pe ε. Teorema lui Lebesgue este un rezultat mult mai profund (deşi există demonstraţii elementare) decît cel referitor la continuitatea funcţiilor monotone.

O clasă strîns legată de funcţiile monotone este *clasa funcţiilor cu variaţie mărginită*. Fie $f(x)$ definită pe un interval $[a,b]$; să considerăm un număr finit de puncte distincte din $[a,b]$, numerotate în ordine crescătoare. Avem deci $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$. Să notăm pe a cu x_0, pe b cu x_{p+1} şi să considerăm numărul pozitiv (sau nul) $\sum_{i=1}^{p+1} | f(x_i) - f(x_{i-1}) |$.

Acest număr se numeşte variaţia funcţiei f asociată „diviziunii" intervalului prin punctele $x_0, \ldots, x_{p+1}$. Fiecărei asemenea diviziuni (d) îi asociem astfel un număr V_d, variaţia lui f. Dacă se ia marginea superioară a tuturor acestor numere V_d, atunci cînd se fac toate diviziunile finite posibile ale lui $[a,b]$, şi dacă această margine superioară (notată cu $\bigvee_a^b [f]$) este un număr finit, se spune că $f(x)$ este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$.

Care este legătura cu funcţiile monotone? Matematicianul francez C. Jordan a demonstrat că orice funcţie cu variaţie mărginită este diferenţa a două funcţii monotone. Demonstraţia nu este dificilă şi o vom omite. Această

legătură poate părea surprinzătoare, dar dacă examinăm puțin noțiunea de variație, vedem că ea n-ar mai trebui să ne mire. Intuitiv vorbind, o funcție, pentru a fi cu variație mărginită, nu trebuie să oscileze prea mult; și funcțiile monotone nu oscilează de loc (sau cresc, sau descresc, pe întreg intervalul lor de definiție).

Care este legătura cu continuitatea? Din teorema lui Jordan se vede că o funcție cu variație mărginită poate fi discontinuă (dar discontinuitățile sale sînt doar de prima speță). Însă orice funcție continuă este cu variație mărginită? Nu! Exemplul următor este iarăși clasic.

Să luăm funcția

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

definită pe $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

Dacă considerăm punctele de diviziune $x_1 = \frac{1}{n\pi}$, $x_2 = \frac{1}{(n-1)\pi}$, ..., $x_n = \frac{1}{\pi}$ și calculăm variația lui f corespunzătoare acestei diviziuni, găsim că, după cum n este par sau impar, V este egal cu $\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$, respectiv cu $\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$; și știți desigur, că, pentru $n \to \infty$, aceste sume tind către ∞. Exemplul furnizat este acela al unei funcții care oscilează foarte mult în vecinătatea originii.

O altă clasă de funcții pe care o vom analiza în acest capitol este *clasa funcțiilor semicontinue*. Ele au fost introduse la începutul secolului de matematicianul francez René Baire și constituie o generalizare, naturală și utilă, a funcțiilor continue.

Definiția continuității (ne situăm pentru moment pe dreapta reală, ceea ce nu e esențial, și considerăm funcții

cu valori reale, ceea ce este esențial) se poate despărți în două proprietăți: anume, $f(x)$ este continuă în x_0, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să implice $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; dar această inegalitate este echivalentă cu îndeplinirea simultană a următoarelor două inegalități:

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) \text{ și } f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$$

Dacă impunem să fie îndeplinită doar una din aceste inegalități, se spune că f este semicontinuă; dacă este îndeplinită prima inegalitate, f este inferior semicontinuă (în punctul x_0), iar dacă este verificată cea de a doua, f este superior semicontinuă. Continuitatea într-un punct revine deci la semicontinuitatea inferioară și superioară simultană în acel punct. Proprietățile funcțiilor superior, respectiv inferior, semicontinue sînt simetrice; anume, dacă f este inferior semicontinuă, $-f$ va fi superior semicontinuă și reciproc. De aceea este suficient să studiem doar proprietățile funcțiilor inferior semicontinue.

Să reformulăm definiția: a spune că $f(x)$ este inferior semicontinuă în punctul x_0 revine la proprietatea că pentru orice $h < f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V$, $h < f(x)$. Într-adevăr, din $f(x) - f(x_0) > -\varepsilon$ deducem $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, deci, pentru $x \in (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0 + \delta(\varepsilon))$, $h < f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ dacă ε este suficient de mic (mai precis, $h < f(x)$ implică existența unui $\varepsilon > 0$, astfel încît $h < f(x_0) - \varepsilon$; este suficient de luat $\varepsilon < f(x_0) - h$).

Dacă f este inferior semicontinuă pe domeniul ei de definiție, mulțimile $B_h = \{x \mid f(x) > h\}$ vor fi deschise pentru orice h real (ele pot fi eventual vide). B_h nu este altceva decît $f^{-1}((h, +\infty))$; vedeți deci că acum putem spune mai puțin decît puteam în cazul funcțiilor continue, ceea ce este firesc.

Funcțiile convexe sînt un exemplu care ilustrează o situație generală: unele proprietăți impuse unei funcții atrag automat altele, care nu par a fi de aceeași natură. Ce este o funcție convexă? Prin definiție, este o funcție definită

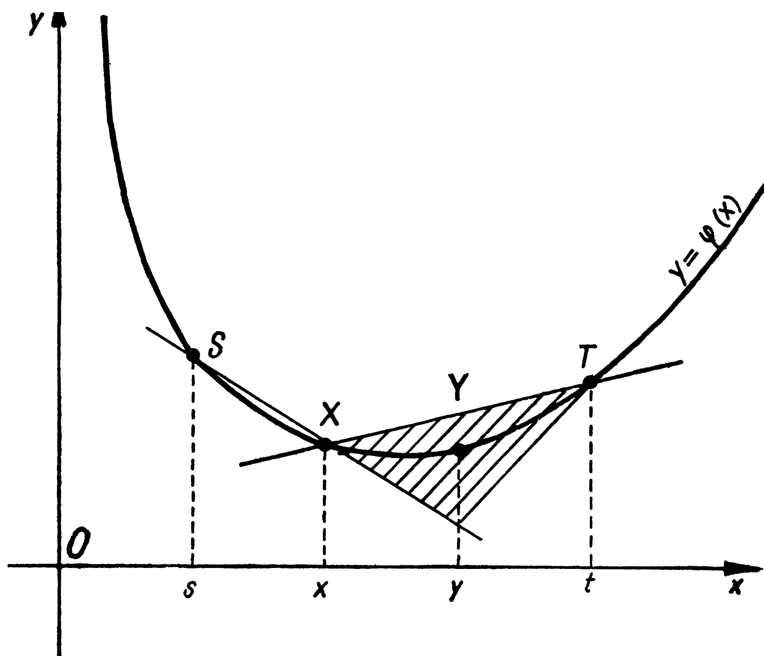


Fig. 5

pe un segment (a, b) al dreptei reale, cu valori reale (aceasta este esențial) și care verifică următoarea inegalitate: pentru orice $x, y \in (a, b)$ și orice număr λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, este verificată inegalitatea

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y).$$

Această inegalitate nu spune altceva decît că punctul $((1-\lambda)x+\lambda y, \varphi((1-\lambda)x+\lambda y))$ nu este situat (fig. 5) deasupra coardei care unește punctele $(x, \varphi(x))$, $(y, \varphi(y))$. Ei bine, această proprietate atrage în mod necesar continuitatea funcției $\varphi(x)$. Vom arăta deci că orice funcție convexă definită pe (a, b) este continuă!

Afirmaţia este evident falsă dacă intervalul de definiţie al funcţiei este închis. De pildă, fie $\varphi(x)$ definită pe $[0,1]$ astfel: $\varphi(x) = 0$ pentru $x \in [0,1)$ şi $\varphi(1) = 1$. Funcţia este convexă, dar desigur prezintă o discontinuitate în punctul 1.

Vom da o demonstraţie geometrică a continuităţii funcţiilor convexe (fig. 5), dar, remarcaţi, este uşor să transcriem totul în termeni de ε şi δ. Fie deci x un punct din (a, b). Intervalul fiind deschis, găsim puncte s, t, astfel ca $s < x < t$ şi $s,t \in (a, b)$. Vom demonstra doar continuitatea la dreapta. Fie deci un y: $x < y < t$. Trebuie să arătăm că $\varphi(x)$ fiind convexă, $\varphi(y) \to \varphi(x)$ atunci cînd $y \to x$. Dacă notăm cu S, X, Y şi T punctele din plan de coordonate $(s, \varphi(s))$, $(x, \varphi(x))$, $(y, \varphi(y))$ şi $(t, \varphi(t))$, convexitatea funcţiei ne asigură că punctul X este situat sub, sau pe, segmentul SY şi că punctul Y este situat sub, sau pe, segmentul XT. Dar aceasta înseamnă că punctul Y este situat în unghiul format de segmentele XT şi XS; să facem acum pe y să tindă către x. Punctul Y în mod necesar tinde către X, deci $\varphi(y) \to \varphi(x)$. Un raţionament perfect similar ne dă şi continuitatea la stînga, deci continuitatea lui φ.

Un exemplu important de funcţie convexă este funcţia exponenţială (convexă pe $(-\infty, +\infty)$). Să demonstrăm, anticipînd puţin, o inegalitate importantă, anume inegalitatea lui Jensen.

Teoremă (Jensen)*. Dacă μ este o măsură pozitivă pe Ω, cu $\mu(\Omega) = 1$, f o funcţie reală în $L^1(\mu)$, $a < f(x) < b$ pe Ω şi dacă $\varphi(x)$ este convexă pe (a, b), atunci

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leqslant \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu$$

(am notat cu $\varphi \circ f$ funcţia compusă $x \to \varphi(f(x))$).

* Referitor la noţiunile neexplicate ce intervin în enunţul teoremei, a se vedea capitolul IV.

Înainte de a trece la demonstrație, să vedem ce se poate obține cu ajutorul acestei teoreme. Să luăm de pildă $\varphi(x) = e^x$. În acest caz inegalitatea devine

$$e^{\left\{\int_\Omega f d\mu\right\}} \leqslant \int_\Omega e^f d\mu.$$

Particularizînd în continuare, să presupunem că Ω este o mulțime finită, i.e. $\Omega = \{p_1, \ldots, p_n\}$ și că $\mu(\{p_i\}) = \frac{1}{n}$, iar $f(p_i) = x_i$. În acest caz $\int f d\mu$ va fi $\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$, iar $\int e^f d\mu$ va fi $\frac{1}{n}(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n})$, deci în definitiv

$$e^{\left\{\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\right\}} \leqslant \frac{1}{n}(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}).$$

Să facem pe $y_i = e^{x_i}$; regăsim inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică

$$(y_1 \cdots y_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n).$$

Dacă se ia $\mu(\{p_i\}) = \alpha_i$, cu $\sum \alpha_i = 1$, găsim inegalitatea

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n.$$

Să trecem la demonstrație. Pentru aceasta să remarcăm că din definiția convexității rezultă următoarea inegalitate:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leqslant \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t},$$

dacă $a < s < t < u < b$ (într-adevăr ambii membri ai inegalității sînt coeficienții unghiulari ai segmentelor $(s, \varphi(s); t, \varphi(t))$, respectiv $(t, \varphi(t); u, \varphi(u))$). Fie $t = \int_\Omega f d\mu$; din ipoteze rezultă că $a < t < b$; dacă β este marginea superioară a cîturilor din membrul stîng al inegalității,

pentru $a < s < t$, β nu va depăşi nici un cît din membrul drept al inegalității considerate, pentru orice $u \in (t, b)$.

Deci, dacă $s < t$, din definiția lui β rezultă

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leqslant \beta,$$

prin urmare $\varphi(s) \geqslant \varphi(t) + \beta(s - t)$, iar dacă $u > t$, atunci

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \geqslant \beta,$$

adică $\varphi(u) \geqslant \varphi(t) + \beta(u - t)$.

Notînd $u = s$, pentru orice $s \in (a, b)$ avem $\varphi(s) \geqslant \varphi(t) + \beta(s - t)$. În particular, pentru $s = f(x)$, $\varphi(f(x)) \geqslant \varphi(t) + \beta(f(x) - t)$. Integrînd (fapt permis căci, φ fiind continuă, $\varphi(f(x))$ va fi măsurabilă) şi ţinînd seama că $t = \int_\Omega f d\mu$ şi că $\mu(\Omega) = 1$, găsim

$$\int_\Omega f d\mu \geqslant \varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right), \text{ q.e.d.}$$

Şiruri de funcţii

Avem acum la îndemînă o serie de exemple şi de proprietăţi privind funcţiile, care să ne permită să mergem mai departe. Este o trăsătură generală a spiritului omenesc de a încerca să reducă chestiuni diverse la cîteva principii generale; dar o altă trăsătură este aceea de a se sprijini pe noţiuni mai simple (sau mai particulare) în studiul unor probleme complexe sau generale, fapt evident în întreaga evoluţie a matematicii. In acest sens, matematicienii au încercat să reducă studiul funcţiilor generale la studiul unor funcţii mai particulare, deci mai bine cunos-

cute, sau mai uşor de manipulat. Aşa s-a pus problema reprezentării funcţiilor „arbitrare" prin serii trigonometrice, problemă despre care am menţionat cîte ceva la începutul acestui capitol. În modul acesta au apărut şirurile (sau, mai general, familiile) de funcţii.

Un şir de funcţii este un şir $f_1(x)$, $f_2(x_2)$,..., $f_n(x)$,... ale cărui elemente sînt funcţii. În cele ce urmează vom presupune că toate elementele unui astfel de şir au un domeniu comun de definiţie. Pentru a simplifica lucrurile, ne situăm pe dreapta reală; să considerăm un interval (a, b) şi un şir de funcţii $f_1(x)$,..., $f_n(x)$ definite pe (a, b). Ne vor interesa două probleme: 1) convergenţa şirului; 2) proprietatea funcţiei limită.

În ceea ce priveşte convergenţa, menţionăm de la început că în acest paragraf nu vom considera decît două tipuri de convergenţă: cea punctuală şi cea uniformă; alte tipuri vor fi considerate în capitolele următoare cînd vom dispune de instrumente mai „puternice".

Vom spune că şirul $f_1(x)$,..., $f_n(x)$,... converge punctual (sau că are loc convergenţa simplă) pe o mulţime E de pe dreaptă (care poate fi întreg intervalul de definiţie (a, b) al funcţiilor f_n, sau o submulţime a sa), dacă, pentru orice $x \in E$, şirul de numere $\{f_n(x)\}$ are o limită. Cu alte cuvinte, pentru orice $x \in E$ şi orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon, x)$ astfel ca, de îndată ce $n, m > N(\varepsilon, x)$, să avem $| f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon$. Fie, pentru orice $x \in E$, $f(x)$ limita şirului de numere $\{f_n(x)\}$. Evident că s-a obţinut astfel o funcţie definită pe mulţimea E (în particular această funcţie ar putea fi o constantă).

Să presupunem că toate funcţiile şirului $\{f_n\}$ sînt continue pe (a, b). Matematicianul francez R. Baire a considerat în teza sa, publicată în 1899, următoarea problemă generală: notînd cu H_1 toate funcţiile ce se obţin ca limite de şiruri de funcţii continue, apoi cu H_2 clasa funcţiilor ce se obţin ca limite de şiruri de funcţii din H_1 ş.a.m.d.

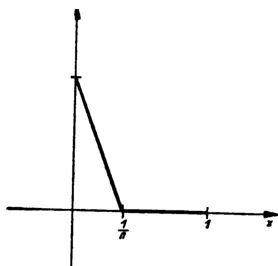


Fig. 6.

(se definesc chiar clase H_α cu α număr transfinit*, dar nu insistăm asupra acestor chestiuni), să se studieze proprietăţile acestor clase. R. Baire a obţinut o caracterizare a funcţiilor de clasă 1 (i.e. ale celor ce se obţin ca limită de funcţii continue), arătînd că mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei astfel de funcţii se bucură de următoarea proprietate: complementara sa (adică mulţimea punctelor de continuitate) este densă în domeniul de definiţie al funcţiei.

Acesta este un rezultat clasic, important, profund, pe care însă nu-l vom demonstra.

Evident că o limită punctuală de funcţii continue poate să nu fie continuă. Un exemplu foarte simplu este oferit de şirul $\{f_n(x)\}$ definit în modul următor: $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = 0$ pentru $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, iar pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x)$ este ordonata punctului de abscisă x, situat pe dreapta ce uneşte punctele $(0,1)$ şi $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $n = 1,2,\ldots$ (fig. 6).

---

* Numerele transfinite au fost introduse în matematică tot de G. Cantor, în legătură cu aşa-numitele tipuri de ordine. Astăzi construcţiile în care intervin numerele transfinite pot fi înlocuite, în majoritatea cazurilor, prin lema lui Zorn, despre care vom vorbi în capitolul următor.

Funcţia limită va fi funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x = 0 \\ 0 \text{ pentru } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{pe } [0,1],$$

deci discontinuă în origine.

Contrar celor crezute de Cauchy (N. Abel a remarcat imediat eroarea lui Cauchy), continuitatea nu se păstrează prin trecere la limită. Ce se întîmplă dacă impunem însă şirului f_n condiţii suplimentare? Dacă şirul converge uniform (şi dacă funcţiile f_n sînt continue), atunci $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ va fi continuă.

Înainte de a da definiţia convergenţei uniforme să ne întoarcem la exemplul dat mai sus. Să fixăm un $\varepsilon > 0$; pentru fiecare $x \in [0,1]$ există un rang $N_x(\varepsilon)$ astfel ca $n > N_x(\varepsilon)$ să implice $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Este uşor de văzut că $N_x(\varepsilon) \to \infty$ (ε fiind fixat) pentru $x \to 0$ ($x \neq 0$). Cu alte cuvinte, ε fiind dat, *nu există* un rang $N(\varepsilon)$, *independent de* x, astfel ca $n > N(\varepsilon)$ să implice $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pentru orice $x \in (0,1]$.

Vom spune că f_n converge uniform către f pe mulţimea E, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru orice $x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dacă $n > N(\varepsilon)$. Aceasta revine la a spune că şirul f_n converge către f în metrica $d(f, g) = \sup |f - g|$, i.e. $d(f_n, f) \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Faptul că convergenţa uniformă păstrează continuitatea, se poate demonstra astfel: remarcăm că putem scrie

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')|.$$

Dîndu-se un $\varepsilon > 0$ arbitrar, convergenţa uniformă ne asigură că există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît, pentru orice x din E, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$. Fixăm deci pe n ca să avem verificată această ultimă condiţie.

Funcţia $f_n(x)$ fiind continuă, găsim, $\varepsilon > 0$ fiind dat, o vecinătate V a punctului x, astfel ca $x' \in V$ să implice $| f_n(x) - f_n(x') | < \frac{\varepsilon}{3}$. Dar atunci $x' \in V$ implică $| f(x) - f(x') | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Funcţia limită este deci continuă.

Noţiunea de convergenţă uniformă nu este legată cu nimic de structura dreptei, deci proprietatea enunţată este valabilă (cu exact aceeaşi demonstraţie) pentru funcţii continue definite pe spaţii topologice.

Un rezultat simplu, cunoscut sub numele de teorema lui Dini, arată ce poate aduce considerarea şirurilor monotone.

Vom utiliza notaţia $f_n \searrow$ (respectiv $f_n \nearrow$) pe o mulţime C pentru a indica faptul că, pentru orice $x \in C$, şirul $\{f_n(x)\}$ este descrescător (respectiv crescător). Astfel de şiruri se numesc, bineînţeles, *şiruri monotone de funcţii.*

Să presupunem că C este compact, că f_n sînt continue şi că $f_n \searrow 0$. Concluzie: şirul $\{f_n\}$ tinde uniform către zero. Aceasta este teorema lui Dini. Demonstraţia este relativ simplă. Pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar să notăm că $C_n = \{x \mid f_n(x) \mid \geqslant \varepsilon\}$. Din continuitatea lui f_n rezultă că C_n este închisă şi, cum $C_n \subset C$ cu C compact, C_n va fi compactă. Faptul că şirul $\{f_n\}$ tinde către zero implică: $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ (căci altfel ar exista un punct $x_0 \in \bigcap C_n$, deci $f_n(x_0) > \varepsilon$ pentru orice n şi deci în punctul x_0 şirul f_n n-ar mai tinde către zero). Dar, potrivit definiţiei compacităţii, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ atrage după sine că există un număr finit de indici, $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$, astfel ca $\bigcap_{i=1}^{p} C_{n_i} = \emptyset$. Acum apare monotonia: din $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \ldots$ rezultă $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \ldots C_n \supset \ldots$ Deci în particular $C_{n_1} \supset C_{n_2} \supset \ldots \supset C_{n_p}$ şi dacă $\bigcap_{i=1}^{p} C_{n_i} = C_{n_p} = \emptyset$, C_{n_p} este vid şi deci C_m este vid pentru

orice $m > n_p$. Altfel spus, pentru $m > n_p$, $f(x) < \varepsilon$ pentru orice $x \in C$. Cum condiția $f_n > 0$ înseamnă $f_n(x) > 0$ pentru orice $x \in C$ și orice n, avem în definitiv $0 < f_n(x) < \varepsilon$ pentru orice $x \in C$ și $n > n_p$, deci convergența este uniformă.

Din acest rezultat se deduce că orice șir monoton de funcții continue care converge către o funcție continuă pe un compact, converge uniform. Într-adevăr, dacă $f_n \searrow f$, n-avem decît să aplicăm rezultatul precedent șirului $\{f_n - f\}$. Dacă $f_n \nearrow f$ aplicăm rezultatul șirului $\{f - f_n\}$. Condiția „f continuă“ este esențială, pentru că aceasta ne asigură că $f_n - f$ sînt continue*.

* O condiție necesară și suficientă care să asigure continuitatea funcției limită ori de cîte ori termenii șirului sînt continui se datorește matematicianului italian C. Arzelá.

CAPITOLUL III

DESPRE VECTORI ŞI SPAŢII VECTORIALE

Spaţii vectoriale

Ştiţi desigur ce este un vector; în mecanică „forţele“ şi vitezele“ sînt vectori. Ce caracterizează aceste mărimi? În afară de faptul că ele au o lungime, o direcţie şi un sens, ele se pot aduna sau scădea între ele şi se pot înmulţi cu numere (scalari). Să vedem cum se fac aceste operaţii în plan.

Fie deci doi vectori $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$. Suma lor va fi diagonala paralelogramului care are ca laturi neparalelele pe $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ (fig. 7). Înmulţirea cu un scalar λ nu schimbă sensul vectorului $\vec{v}$ dacă scalarul este pozitiv, lungimea noului vector $\lambda\vec{v}$ fiind $|\lambda|\ |\vec{v}|$, unde, provizoriu, am notat cu $|\vec{v}|$ lungimea lui $\vec{v}$. Direcţia nu se schimbă. Scăderea $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ revine la adunarea lui $\vec{v}_1$ cu $(-1)\vec{v}_2$. Toate acestea vă sînt bine cunoscute.

Rămînem în plan şi alegem doi vectori care să nu fie coliniari, $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$. Atunci orice vector $\vec{v}$ îl putem scrie ca o *combinaţie liniară* a vectorilor $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$, adică $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, numerele λ_1 şi λ_2 fiind determinate în mod unic. Aceasta se vede imediat (un mic desen şi corespondenţa biunivocă între punctele de pe dreaptă şi numerele reale vă vor convinge). Din faptul că orice vector $\vec{v}$ se poate reprezenta în mod unic ca o combinaţie liniară a vectorilor $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$, rezultă că în plan nu pot exista mai mult de doi vectori liniar independenţi. Aceasta înseamnă că dacă avem

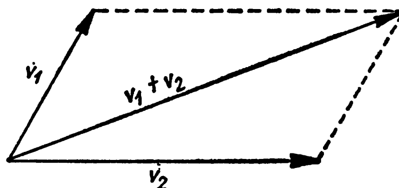


Fig. 7.

trei vectori arbitrari $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, atunci există o relaţie de forma

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = 0,$$

în care coeficienţii λ_1, λ_2, λ_3 nu sînt simultan nuli.

Dacă trecem acum în spaţiu, consideraţii analoge ne arată că nu pot exista mai mult de trei vectori liniari independenţi şi că există efectiv sisteme de trei vectori liniari independenţi. Ideea de a trece de la trei la un număr n oarecare de vectori este firească şi justificată de necesităţi, care nu sînt numai de natură geometrică.

Din cele de mai înainte trebuie să reţinem următoarele *proprietăţi* ale vectorilor: 1) posibilitatea de adunare şi scădere; 2) înmulţirea cu scalarii; 3) reprezentarea oricărui vector ca o combinaţie liniară de vectori liniar independenţi. Matematicienii au remarcat de multă vreme că există şi alte categorii de obiecte matematice ce se pot organiza în mod asemănător vectorilor din plan sau din spaţiu.

Un exemplu simplu îl constituie mulţimea polinoamelor de grad cel mult n. Ştim să adunăm două polinoame, să le scădem, să le înmulţim cu un număr, şi ştim de asemenea că aceste operaţii efectuate cu polinoame de grad cel mult n (n fiind un număr natural fixat, dar arbitrar) ne conduc la polinoame de acelaşi tip (dacă am fi considerat polinoame de grad egal cu n situaţia n-ar mai fi fost aceeaşi, întrucît suma a două polinoame de acelaşi grad poate avea grad mai mic: $(x^2 + x + 1) + (-x^2 - x + 2) = 3$ este un polinom de grad zero!). Un singur aspect rămîne deocamdată neclarificat: cum s-ar putea defini „lungimea" unui polinom, dar vom lămuri aceasta ulterior.

Să observăm că în mulțimea polinoamelor de o variabilă de grad cel mult n nu putem avea mai mult de $n+1$ polinoame liniar independente și că există într-adevăr $n+1$ astfel de polinoame.

Ce înseamnă independență liniară? Vectorii $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sînt liniar independenți dacă, din faptul că $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = 0$, rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, adică nici un vector $\vec{v}_p$ nu poate fi exprimat ca o combinație liniară a celorlalți.

Întorcîndu-ne la polinoamele noastre, un exemplu de $n+1$ polinoame liniar independente este oferit de sistemul $1, x^2, x^3, \ldots, x^n$. Independența liniară rezultă din faptul că o relație $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_{n+1} x^n \equiv 0$ (căci a spune că $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0$, $P_1, \ldots, P_n$ fiind polinoame, înseamnă a spune că suma respectivă este *polinomul nul*, adică polinomul cu toți coeficienții nuli) implică, desigur, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$. (Orice polinom de grad n, dacă nu e identic nul, are n rădăcini.) Să arătăm acum că nu pot exista mai mult de $n+1$ polinoame liniar independente de grad cel mult n. Fie deci $P_1, \ldots, P_m$ m polinoame de grad cel mult n, cu $m > n+1$. Este suficient să considerăm cazul $m = n+2$ (de ce?). Dacă printre cele m polinoame există $n+1$ liniar dependente, să presupunem de pildă $P_1, \ldots, P_{n+1}$, atunci există $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$, nu toți nuli, astfel ca $\mu_1 P_1 + \ldots + \mu_{n+1} P_{n+1} = 0$. Este suficient să luăm $\mu_{n+2} = 0$ și atunci $\mu_1 P_1 + \ldots + + \mu_{n+2} P_{n+2} = 0$, deși nu toți coeficienții $\mu_1, \ldots, \mu_{n+2}$ sînt nuli.

În cazul contrar, în care $P_1, \ldots, P_{n+1}$ sînt liniar independente, fiecare P_i se va scrie sub forma $\sum_j \lambda_i^j x^{j*}$ $(i = = 1, \ldots, n+1)$. Explicitînd condiția de independență liniară a polinoamelor $P_1, \ldots, P_{n+1}$ și folosind rezultatul bine cunoscut că, pentru ca un sistem liniar omogen să

admită doar soluția nulă, este necesar ca determinantul sistemului să fie diferit de zero, se obține

$$\det|\lambda_i^j| = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 \ldots\ldots & \lambda_n^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \ldots\ldots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n \ldots\ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Scriind $P_{n+2} = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, nu toți c_i vor fi nuli și deci problema găsirii a $n+2$ numere $\mu_1, \ldots, \mu_{n+2}$ se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare neomogen, de forma $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^j \mu_i = c_j$, necunoscutele fiind $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$, iar $j = 0, \ldots, n$. Într-adevăr, a arăta că polinoamele $P_1, \ldots, P_{n+1}$, P_{n+2} nu sînt liniar independente înseamnă a arăta că există numere $\beta_1, \ldots \beta_{n+1}, \beta_{n+2}$, nu toate nule, astfel încît $\beta_1 P_1 + \ldots + \beta_{n+1} P_{n+1} + \beta_{n+2} P_{n+2} = 0$, sau $\beta_1 P_1 + \ldots + \beta_{n+1} P_{n+1} = -\beta_{n+2} P_{n+2}$. Dacă $\beta_{n+2} = 0$, atunci $\beta_1 P_1 + \ldots + \beta_{n+1} P_{n+1} = 0$, ceea ce, avînd în vedere ipoteza, implică $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n+1} = 0$. Deci în cazul în care polinoamele $P_1, \ldots, P_{n+1}, P_{n+2}$ sînt liniar dependente, trebuie ca β_{n+2} să fie diferit de zero. Prin urmare putem împărți cu $-\beta_{n+2}$ și relația de dependență liniară devine $-\frac{\beta_1}{\beta_{n+2}} P_1 - \ldots - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_{n+2}} P_{n+1} = +P_{n+2}$. Introducînd notația $-\frac{\beta_i}{\beta_{n+2}} = \mu_i$, totul se reduce la a determina numerele $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$, astfel încît $\mu_1 P_1 + \ldots + \mu_{n+1} P_{n+1} = P_{n+2}$, ceea ce conduce la sistemul de ecuații liniare $\sum \lambda_i^j \mu_i = c_j$.

Conform formulei bine cunoscute a lui Kramer* sistemul are o soluție, deci există $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ (nu toți nuli, căci sistemul este neomogen), astfel că $\sum_{i=1}^{n+2} \mu_i P_i = 0$.

Alt exemplu (la care se reduce de altfel cel de mai înainte) îl constituie mulțimea sistemelor de n numere reale. Dacă notăm cu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ două astfel de sisteme, suma lor se definește în mod natural prin adunarea „componentelor", adică $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + + \beta_n)$. Înmulțirea lui α cu un scalar λ (real) va fi definită prin $\lambda\alpha = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$. Ce remarcăm? Sistemele $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ sînt liniar independente și orice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se scrie în mod unic sub forma $\alpha = \sum \lambda_i e_i$. Putem trece la o definiție generală: o mulțime E se numește *spațiu vectorial* (peste un

---

* Formula care permite obținerea soluțiilor unui sistem liniar neomogen de n ecuații cu n necunoscute, cu ajutorul determinanților. Astfel, fie sistemul $\sum_j a_{ij} x_j = b_i$. Se presupune că det $|a_{ij}|$

$$\det |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

este diferit de zero. Atunci x_j se calculează ca un cît, la numitor figurînd det $|a_{ij}|$, iar la numărător determinatul obținut prin înlocuirea coloanei j $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, a determinantului det $|a_{ij}|$, prin coloana $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alcătuită din membrii din dreapta ai sistemului.

corp de scalari, pe care la început îl vom presupune corpul numerelor reale), dacă în E s-au definit două operații: 1) *adunarea* (o aplicație de la $E \times E$ în E, care fiecărei perechi (x, y) de elemente îi asociază un element notat $x + y$ din E, cu proprietățile: $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$; de asemenea, se presupune că există un element, notat cu 0, astfel încît $x + 0 = x$ pentru orice $x \in E$, și că oricărui $x \in E$ îi corespunde un element, notat cu $-x$, astfel încît $x + (-x) = 0$); 2) *înmulțirea cu un scalar* (o aplicație de la $R \times E$ în E, $(\lambda, x) \to \lambda x$, R fiind corpul scalarilor, astfel încît $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $1 \cdot x = x$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(\mu x) = \lambda \mu x$; cu 1 s-a notat unitatea corpului R, în cazul că R este corpul numerelor reale, această unitate este chiar numărul 1).

Elementele spațiului vectorial le vom numi *vectori*. Evident că exemplele date mai înainte sînt spații vectoriale, dar elementele lor nu sînt neapărat vectori în sensul pe care-l cunoaștem.

Dimensiunea unui spațiu vectorial este, prin definiție, numărul maxim de vectori liniari independenți. Vectorii din plan formează deci un spațiu vectorial de dimensiune egală cu 2, cei din spațiu — un spațiu vectorial de dimensiune 3; polinoamele de grad cel mult egal cu n formează un spațiu vectorial de dimensiune $n + 1$.

Desigur, se poate întîmpla ca în anumite spații vectoriale să existe o infinitate de vectori liniar independenți, în care caz se spune că spațiul este de dimensiune infinită. Cel mai simplu exemplu îl constituie, de pildă, spațiul vectorial al tuturor polinoamelor, căci un polinom de grad n nu poate fi o combinație liniară, cu coeficienți din R, de polinoame de grad mai mic. Rezultă că la orice sistem de n polinoame liniar independente putem adăuga un polinom de grad mai mare decît superiorul gradelor polinoamelor sistemului, sistemul astfel obținut (de $n + 1$ polinoame) fiind încă liniar independent. Numărul n fiind arbitrar, rezultă că dimensiunea spațiului vectorial al tuturor polinoamelor este infinită.

Alt exemplu de spaţiu vectorial de dimensiune infinită îl constituie mulţimea funcţiilor continue, cu valori reale pe un interval dat. Evident, această mulţime este un spaţiu vectorial, suma şi înmulţirea cu scalarii definindu-se natural:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

La fel se întîmplă şi cu mulţimea funcţiilor arbitrare, cu valori reale, sau cu valori într-un spaţiu vectorial.

Astfel de exemple de spaţii vectoriale de dimensiune infinită se mai pot „fabrica" plecînd de la şiruri de numere: de pildă, fie $B(N)$ spaţiul şirurilor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ de numere reale, cu proprietatea că $\sup_n |\alpha_n| = M_\alpha$ este un număr finit. Adunarea şi înmulţirea cu scalari se face „pe componente": $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots)$ şi $\lambda\alpha = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots)$. Că rezultatul acestor operaţii aparţine în continuare lui $B(N)$, se verifică imediat. Sau, fie spaţiul $C_0(N)$ al şirurilor de numere reale $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ cu $\alpha_n \to 0$ cînd $n \to \infty$, cu aceleaşi operaţii. Acestea sînt cazuri simple, dar care intervin în probleme de analiză.

Un exemplu mai important îl constituie spaţiul $l^2(N)$ al şirurilor de numere reale $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, care au proprietatea că $\sum \alpha_n^2 < \infty$.

Toate acestea sînt spaţii vectoriale de dimensiune infinită.

Noţiunea de spaţiu vectorial este o noţiune pur algebrică şi pînă în prezent, din cele ce am spus, nu apare încă utilitatea acestei noţiuni. Pentru cititorii care au unele cunoştinţe de algebră liniară, justificările sînt inutile. Ei ştiu că, de pildă, în discuţia sistemelor de ecuaţii liniare apare necesitatea considerării spaţiilor vectoriale de dimensiuni oricît de mari. Pe ceilalţi îi solicităm să mai aştepte puţin, întrucît eventuala nerăbdare nu le poate fi satisfăcută pe loc, ci puţin mai departe.

În continuare ne vom mărgini (pentru moment) la spaţiile vectoriale finit-dimensionale. Orice sistem maximal de vectori liniar independenţi se va numi *bază*. Maximal înseamnă: dacă adăugăm sistemului considerat încă un

vector arbitrar (nenul), vectorii noului sistem nu mai sînt liniar independenţi. Dacă n este dimensiunea unui spaţiu vectorial E şi dacă $e_1, \ldots, e_n$ este o bază (din însăşi definiţia dimensiunii rezultă că o bază se compune în mod necesar dintr-un număr de vectori egal cu dimensiunea spaţiului), atunci orice element x al lui E se va exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor $e_1, \ldots, e_n$ ai bazei. Prin urmare, dacă x este un vector din E, atunci sistemul $(e_1, \ldots, e_n)$ fiind o bază, vectorii sistemului $(e_1, \ldots, e_n, x)$ nu vor mai fi liniar independenţi, deci există constante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, nu toate nule, astfel ca $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} x = 0$. Evident că $\lambda_{n+1} \neq 0$, căci altfel ar însemna că nu toţi scalarii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt nuli şi am avea $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, deci vectorii $e_1, \ldots, e_n$ n-ar mai fi liniar independenţi, ceea ce contravine ipotezei. Putem împărţi prin λ_{n+1} şi găsim, în definitiv, că

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} e_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} e_n = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n,$$

unde $c_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}$. Scalarii $c_1, \ldots, c_n$ se numesc coordonatele vectorului x în raport cu baza $e_1, \ldots, e_n$. Dacă $f_1, \ldots, f_n$ este o altă bază a spaţiului E, vectorul nostru x se va exprima şi ca o combinaţie liniară a vectorilor $f_1, \ldots, f_n$, i.e. $x = d_1 f_1 + \ldots + d_n f_n$. Cum $f_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^k e_i$, găsim imediat modul în care se exprimă coordonatele c_i în funcţie de coordonatele d_i, şi reciproc. Anume

$$x = \sum_{k=1}^{n} d_k \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i^k e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} d_k \mu_i^k \right) e_i,$$

deci

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} d_k \mu_i^k \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Aceste formule ne arată că este suficient să cunoaştem modul în care se exprimă baza $f_1, \ldots, f_n$ în funcţie de baza

$e_1, \ldots, e_n$, pentru a putea obține formulele generale de transformare.

Altă noțiune importantă este cea de *subspațiu vectorial*. Fie E un spațiu vectorial. O submulțime F a sa se numește un subspațiu vectorial, dacă este un spațiu vectorial, operațiile în F fiind cele induse din E. Mai explicit: F va fi un subspațiu, dacă, pentru orice x, $y \in F$, avem $x + y \in F$, dacă pentru orice $x \in F$ există $-x \in F$, astfel încît $x + (-x) = 0$ și, în sfîrșit, dacă pentru orice scalar λ avem $\lambda x \in F$ cînd $x \in F$. Mulțimea redusă la elementul 0 este desigur un subspațiu, dar acesta este un caz neinteresant.

Exemple de subspații ale unui spațiu dat se pot găsi ușor. De exemplu dacă, în plan, considerăm mulțimea tuturor vectorilor coliniari cu un vector V oarecare, fixat, obținem un subspațiu. La fel, dacă în spațiul cu trei dimensiuni considerăm doi vectori care să nu fie coliniari, atunci mulțimea tuturor vectorilor coplanari cu acești doi vectori formează un subspațiu vectorial al spațiului tuturor vectorilor tridimensionali.

În cazul mulțimii polinoamelor de grad cel mult n, mulțimea polinoamelor de grad cel mult p (cu $p < n$) formează un subspațiu de dimensiune p.

În cazul vectorilor din plan, orice subspațiu vectorial este de tipul celui indicat mai înainte; în cazul vectorilor tridimensionali apar mai multe posibilități: unele subspații pot fi generate de doi vectori necoliniari, dar altele pot fi generate de un singur vector nenul (n-am definit încă ce este un *subspațiu generat de o mulțime de elemente*, ceea ce vom face imediat, dar sensul acestei expresii este evident, măcar intuitiv).

În cazul polinoamelor de grad cel mult n avem încă mai multe posibilități de subspații, iar în cazul funcțiilor continue și mai multe.

Ce înseamnă însă subspațiu generat de o mulțime de elemente? Dacă M este o submulțime a spațiului vectorial E, subspațiul generat de M, pe care-l vom nota cu $E(M)$, va fi, prin definiție, mulțimea tuturor combinațiilor liniare (finite) $\sum \lambda_i x_i$, x_i fiind elemente arbitrare din M. Deci un

element x oarecare din $E(M)$ se va scrie $x = \sum \lambda_i x_i$, $x_i \in M$, sumarea făcîndu-se în raport cu un număr finit de indici, iar scalarii λi fiind arbitrari (adică elemente arbitrare din corpul scalarilor peste care E este spaţiu vectorial). Evident că $E(M)$ este un spaţiu vectorial; s-ar putea, desigur, ca $E(M)$ să coincidă cu întreg E şi — exceptînd cazurile banale $M = \emptyset$ sau $M = \{0\}$ — $E(M)$ nu va fi nici vid, nici redus la $\{0\}$.

Din definiţia dimensiunii unui spaţiu vectorial rezultă că dimensiunea unui subspaţiu (în cazul finit dimensional) este sigur mai mică decît cea a spaţiului, egalitatea avînd loc doar în cazul cînd subspaţiul coincide cu spaţiul întreg.

Un loc de seamă printre subspaţiile dintr-un spaţiu dat îl joacă *subspaţiile maximale*. Dacă E este un spaţiu vectorial, iar F un subspaţiu al său, se spune că F este maximal dacă *nu există* nici un subspaţiu F', $F \subset F' \subset E$, diferit de F şi E. De exemplu, dacă E este de dimensiune n, orice subspaţiu de dimensiune n-1 este maximal.

Să părăsim aceste considerente generale pentru a analiza cazul spaţiului euclidian cu n dimensiuni, spaţiu ce se notează de obicei cu R^n (deci planul se va nota cu R^2, spaţiul tridimensional cu R^3, iar dreapta reală cu R^1). Pe R^n se pot considera mai multe structuri: una topologică (R^n ca spaţiu topologic) şi alta vectorială (R^n ca spaţiu vectorial). Pe noi ne vor interesa relaţiile ce există între aceste structuri, obţinînd astfel cel mai simplu exemplu de spaţiu vectorial topologic.

Ştim să definim pe R^n o distanţă; am văzut, în cazul planului (exemple perfect asemănătoare se pot da şi în cazul spaţiilor cu n dimensiuni) că de fapt putem defini mai multe distanţe; cel mai firesc este să considerăm distanţa euclidiană $d(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$, în care $(x_1, \dots, x_n)$ respectiv $(y_1, \dots, y_n)$ sînt coordonatele punctului x, respectiv y în raport cu un sistem de axe rectangulare, arbitrar ales, dar fixat o dată pentru totdeauna în consideraţiile noastre. Un sistem fundamental de vecinătăţi al originii va fi dat de bilele

$B(0, r) = \{x \in R^n, d(0, x) < r\}$, r parcurgînd un şir oarecare de numere pozitive ce tind către zero.

Un punct oarecare x_0 va avea ca sistem fundamental de vecinătăţi bilele $B(x_0, r) = \{x \in R^n, d(x_0, x) < r\}$, cu r ca mai sus. Fiecărui punct x din R^n, diferit de origine, să-i ataşăm vectorul său de poziţie, deci vectorul ce porneşte din origine şi ajunge în x. Mulţimea acestor vectori formează un spaţiu vectorial ale cărui elemente sînt puse în corespondenţă biunivocă cu punctele spaţiului R^n; vom spune că prin această corespondenţă biunivocă, spaţiul vectorial considerat l-am identificat cu R^n. Dacă în acest spaţiu se alege ca bază sistemul format din vectorii de lungime 1, orientaţi în sensul pozitiv al sistemului de axe de coordonate ales, şi dacă notăm cu $e_1, \ldots, e_n$ aceşti vectori (corespunzînd axelor $OX_1, OX_2, \ldots, OX_n$), atunci vectorul de poziţie al punctului x, pe care-l vom nota tot cu x, se va exprima în funcţie de $e_1, \ldots, e_n$ astfel: $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt coordonatele lui x (faţă de baza $e_1, \ldots, e_n$). Operaţiile între vectori sînt cele cunoscute (adunarea după regula paralelogramului şi înmulţirea cu scalarii reali).

Să utilizăm notaţia următoare: dacă A este o mulţime oarecare de vectori (dintr-un spaţiu vectorial oarecare), să notăm cu $x + A$ mulţimea tuturor vectorilor de forma $x + y$, cu $y \in A$, şi cu $x - A$ pe cea a tuturor vectorilor de forma $x - y$, cu $y \in A$. Mai general, dacă A şi B sînt două mulţimi de vectori, atunci $A + B$ va fi mulţimea acelor z de forma $z = x + y$, cu $x \in A$, $y \in B$. Cu λA se notează mulţimea elementelor de forma λx, $x \in A$, adică mulţimea elementelor ce se obţin din A printr-o *omotetie* faţă de origine.

Să ne întoarcem la vecinătăţile punctelor din R^n. Cu ajutorul identificării punctelor cu vectorii lor de poziţie, vedem imediat că $B(x, r)$ nu este altceva decît $x_0 + B(0, r)$, deci (ceea ce este evident din punct de vedere geometric) că o vecinătate arbitrară a unui punct x_0 din R^n se obţine pur şi simplu „translatînd" prin vectorul x_0 o vecinătate convenabilă a originii. (Nu este adevărat în exemplul par-

ticular de la pag. 64). Într-un spaţiu topologic oarecare afirmaţia nu este adevărată şi nici măcar n-are sens în general, căci nu ştim ce înseamnă a aduna două puncte! Dar în cazul considerat nu adunăm două puncte (ceea ce n-are sens), ci doi vectori, deci ştim ce este translaţia, şi constatăm că topologia „naturală" a lui R^n se obţine în modul indicat mai sus.

Să mai remarcăm că utilizarea distanţei a fost făcută pentru că este naturală şi comodă. Dar se pot alege alte sisteme fundamentale de vecinătăţi ale originii, care să nu fie constituite din bile şi, plecînd de la un sistem fundamental de vecinătăţi arbitrar al originii, obţinem prin translaţii un sistem fundamental de vecinătăţi al oricărui punct din R^n.

Un alt fapt asupra căruia trebuie să atragem atenţia este acela că operaţiile de adunare şi de înmulţire cu scalari sînt operaţii continue. Aceasta înseamnă doar că funcţia definită pe $R^n \times R^m$ cu valori în R^n: $(x, y) \to (x + y)$ este continuă şi că funcţia $(\lambda, x) \to \lambda x$ definită pe $R^1 \times R^n$ cu valori în R^n de asemenea.

Mai mult, din cauza liniarităţii şi a modului în care este definită topologia pe R^n (deci şi pe $R^n \times R^n$), este suficient a demonstra continuitatea sumei de pildă doar în origine, căci ea va rezulta apoi în orice punct.

Din punct de vedere geometric aceste afirmaţii sînt evidente şi putem să le explicităm folosind vecinătăţi, verificînd astfel afirmaţiile noastre.

Încă două observaţii: în primul rînd distanţa $d(x, y)$, între două elemente ale lui R^n, este definită prin $d(x, y) = d(0, x-y)$, deci intervine structura vectorială a lui R^n; în al doilea rînd, $d(0, \lambda x) = |\lambda| \, d(0, x)$ (omogenitatea distanţei). Aceste două proprietăţi sînt proprietăţi suplimentare ale distanţei în R^n. Nu orice distanţă le posedă (chiar dacă este definită pe un spaţiu vectorial). Vom nota cu $||x|| = d(0, x)$ ceea ce vom numi *norma* lui x.

Înainte de a trece mai departe, să definim numerele complexe. Vă amintiţi că în rezolvarea ecuaţiilor de gradul doi apare acel misterios i, cu proprietatea că $i^2 = -1$. Ştiţi

de asemenea că un număr complex este o expresie de forma $a + ib$, unde a şi b sînt numere, şi mai ştiţi că există o corespondenţă biunivocă naturală între numerele complexe şi punctele din plan. Cum numerele reale sînt definite cu toată rigoarea, nu este greu să înlăturăm orice mister în legătură cu numerele complexe. Un astfel de număr (complex) este o pereche de numere reale (a, b); însă important este modul în care sînt definite *operaţiile* între numerele complexe:

1) *adunarea* $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ corespunde, dacă utilizăm reprezentarea geometrică, *adunării vectorilor* de componente (a, b) respectiv (a', b'); 2) *înmulţirea* $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$ corespunde obţinerii unui vector, a cărui lungime este produsul lungimii vectorilor (a, b) şi (a', b'), dar care vector a suferit o rotaţie în jurul originii.

Notînd cu $r^2 = a^2 + b^2$ şi cu φ unghiul („argumentul") pe care îl formează vectorul (a, b) cu direcţia pozitivă a axei reale, obţinem reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe: $(a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Un calcul simplu arată că înmulţirea a două numere complexe revine la adunarea argumentelor, modulele (i.e. lungimile vectorilor respectivi) înmulţindu-se.

Proprietatea „misterioasă" $i^2 = -1$ revine la faptul că (0,1) înmulţit cu (0,1) dă, conform definiţiei, (—1,0).

Acum, dacă identificăm un număr real a cu vectorul $(a, 0)$,în loc de (a, b) putem scrie $a + ib$ ceea ce este justificat, dacă ţinem seama că $(a, 0) + (0 ,b) = (a, b)$.

Am lămurit deci ce sînt numerele complexe. La fel ca şi numerele reale, numerele complexe (a căror mulţime o vom nota cu C) formează un *corp*. Aceasta înseamnă că suma, produsul, împărţirea (cu un număr diferit de zero) ne conduc tot la numere complexe şi că, pentru orice $z \in C$ $z \neq 0$, există z' astfel încît $zz' = 1$ (z' se notează cu z^{-1}).

Am avut nevoie de aceste consideraţii pentru că în continuare vom considera spaţii în care scalarii pot fi eventual numere complexe sau chiar funcţii cu valori complexe. Deci, în cele ce urmează, în considerentele noastre de spaţii vec-

toriale, corpul scalarilor va fi R sau C (tot ceea ce s-a spus pînă în prezent relativ la spații vectoriale peste R rămîne valabil, dacă considerăm spații vectoriale peste C).

În sfîrşit, o noţiune bine cunoscută în geometrie este cea de ortogonalitate. Dacă x și y sînt doi vectori din R^n, unde $x = (x_1, ..., x_n)$ și $y = (y_1, ..., y_n)$ și dacă definim produsul scalar al acestor doi vectori astfel: $(x, y) = x_1y_1 + + ... + x_ny_n$, atunci condiția ca vectorul x să fie ortogonal pe vectorul y este ca *produsul scalar* (x, y) *să fie nul.*

În cazul $n = 2$, această proprietate rezultă chiar din definiția uzuală a produsului scalar, $(x, y) = \|x\| \|y\| \cdot \cos (x, y)$, deci $\cos (x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$, unde cu $\|x\|$ și $\|y\|$ am notat lungimea vectorilor x și respectiv y.

În geometria analitică se arată ușor că produsul scalar (x, y) se poate defini și ca $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$, deci afirmația referitoare la ortogonalitate este verificată. În cazul n-dimensional, argumente de acelaşi tip ne conduc la formula $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ și deci, iarăși, ortogonalitatea revine la anularea produsului scalar.

Cu această ocazie să demonstrăm o inegalitate elementară, dar importantă, cunoscută sub numele de inegalitatea lui Cauchy — Buniakowschi-Schwartz.

Dacă $x_1, ..., x_n$ și $y_1, ..., y_n$ sînt numere reale, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0;$$

egalitatea are loc numai dacă $x_i = \mu y_i$, pentru orice $i = 1, ..., n$. Demonstrația se face astfel: fie λ un număr real oarecare. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2 \geqslant 0.$$

Dar

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Pentru ca trinomul (în λ) să fie de semn constant, trebuie ca discriminantul să fie negativ sau nul. Discriminantul trinomului va fi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0,$$

deci ceea ce căutam.

Inegalitatea lui Cauchy — Buniakovski — Schwartz se poate scrie și în modul următor: $|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|$. Sub această formă o vom utiliza esențial într-unul din capitolele următoare.

Convexitate și topologie

În capitolul al doilea am întîlnit termenul *convex* în legătură cu așa-numitele funcții convexe. Acum vom considera din nou acest termen, într-un context puțin diferit. Fie E un spațiu vectorial. Mulțimea punctelor z de forma $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, cu $\lambda \in [0,1]$, să o numim segment cu extremitățile x și y. O mulțime A, într-un spațiu vectorial E, este convexă, dacă posedă următoarea proprietate: dacă x și y aparțin lui A, atunci orice punct de pe segmentul de extremități (x, y) aparține lui A.

În particular, orice subspațiu este o mulțime convexă (reciproca fiind evident falsă). Convexitatea este o proprietate geometrică extrem de importantă, chiar în spațiile vectoriale finit dimensionale.

În spațiul euclidian convexitatea este o noțiune bine cunoscută, fiind ușor de dat exemple de mulțimi convexe, precum și de mulțimi care nu sînt convexe. Orice bilă este convexă și orice linie poligonală care nu se reduce la un singur segment nu este convexă.

Iată cîteva proprietăţi legate de mulţimile convexe. Fie A o mulţime convexă şi $x_1, \ldots, x_p$ puncte arbitrare din A. Atunci punctul $z=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ (unde λ_i sînt numere ce verifică $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ şi $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$) aparţine lui A.

Demonstraţie. Pentru $p = 2$ cădem peste definiţia convexităţii. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice $p - 1$ puncte. Fie $\mu=\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i$ şi $y=\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$ (dacă μ ar fi zero, atunci λ_p ar trebui să fie 1 şi proprietatea este banală). Ce putem spune despre y? Notînd cu $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$,

$$\sum_{i=1}^{p-1} \mu_i = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i} = 1$$

(evident că $\mu_i \in [0,1]$), deci (pe baza inducţiei) $y \in A$ datorită convexităţii mulţimii A. Dar

$$\lambda_p = 1 - \mu \text{ şi } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\mu\lambda_i}{\mu} x_i + \lambda_p x_p = \mu \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i + \\ + \lambda_p x_p = \mu y + (1 - \mu) x_p,$$

cu y şi $x_p \in A$, adică concluzia căutată.

Se vede uşor că intersecţia unei familii oarecare de mulţimi convexe este convexă.

Să ne întoarcem la R^n; remarcăm că orice bilă $B(x_0, r)$ este o mulţime convexă. Rezultă că originea O şi, deoarece vecinătăţile unui punct oarecare x_0 se obţin translatînd vecinătăţile originii, orice alt punct al lui R^n posedă un sistem fundamental de vecinătăţi *convexe*.

Altă proprietate a vecinătăţilor originii în R^n este următoarea: aceste vecinătăţi „absorb" orice punct din R^n. Mai precis, orice bilă $B(0, r)$ (cu $r > 0$) am considera, pentru

orice $x_0 \in R^n$ există un număr real $\lambda (\lambda \neq 0)$, astfel încît $\lambda x_0 \in B(0, r)$. Într-adevăr, este suficient ca λ să verifice condiția $|\lambda| \, \|x_0\| < r$, deci ca $|\lambda| < \frac{r}{\|x_0\|}$ dacă $x_0 \neq 0$ (în cazul $x_0 = 0$ nu mai este nimic de arătat). Această proprietate se poate formula și astfel: fiind date bila $B(0, r)$ și un punct x_0, putem să dilatăm bila astfel, încît x_0 să aparțină bilei dilatate (i. e. $B(0, \mu r)$). Proprietatea fiind adevărată pentru bile, va fi adevărată pentru orice vecinătate a originii, căci bilele $B(0, r)$ formează, cînd r variază, un sistem fundamental de vecinătăți pentru O.

O mulțime B se numește *absorbantă*, dacă se bucură de proprietatea că pentru orice $x \in E$ există un scalar λ (care depinde de x), $\lambda \neq 0$, astfel încît $\lambda x \in B$. Deci vecinătățile originii sînt absorbante, dar, desigur, există mulțimi absorbante care nu sînt vecinătăți (un exemplu simplu de mulțime absorbantă îl constituie mulțimea B, reuniunea circumferinței unitate $x^2 + y^2 = 1$ și a originii $\{0\}$).

Fiind dată o mulțime oarecare A a unui spațiu vectorial E, există o mulțime convexă cea mai mică, numită *înfășurătoarea convexă* a lui A, notată cu ch(A), astfel încît ch$(A) \supset A$. Mulțimea ch(A) va fi intersecția tuturor mulțimilor convexe ce conțin pe A; există cel puțin o astfel de mulțime, spațiul întreg E. Elementele lui ch(A) vor fi acei $y \in E$ care se pot scrie sub forma $y = \sum \lambda_i x_i$, suma fiind finită, $\lambda_i \in [0,1]$ și $\sum \lambda_i = 1$.

În sfîrșit, să încheiem partea elementară a acestui paragraf cu încă o noțiune, aceea de *punct extremal*. Fie deci E un spațiu vectorial peste R (pe scurt, un spațiu vectorial real; cele peste C se numesc spații vectoriale complexe) și A o mulțime convexă din E. Un punct $x_0 \in A$ este *punct extremal* al mulțimii A, dacă din $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda) y$, cu x și $y \in A$, rezultă sau $x_0 = x$, sau $x_0 = y$; cu alte cuvinte, pentru orice segment din A care conține pe x_0, acest x_0 nu poate fi decît o extremitate a segmentului respectiv. Definiția este generală.

Să dăm cîteva exemple.

De pildă, punctele extremale ale unui pătrat din plan sînt vîrfurile sale. Dacă am considera un cub, sau un poliedru în spațiul R^3, punctele extremale vor fi tocmai vîrfurile cubului sau ale poliedrului respectiv.

În cazul unei bile închise, de exemplu $B(0,1)$ (i.e. mulțimea punctelor (x_1, x_2, x_3) care verifică relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$), mulțimea punctelor extremale va fi chiar sfera $S(0,1)$.

Există mulțimi convexe care n-au nici un punct extremal, dar în mod necesar aceste mulțimi nu pot fi compacte, cum va rezulta dintr-o teoremă din paragraful următor. În orice caz, exemplele sînt ușor de dat; de pildă chiar bila $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ nu are nici un punct extremal.

Un exemplu mai puțin banal este următorul: fie spațiul $C_0(N)$ al șirurilor de numere $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ reale care tind către zero și fie $\|\alpha\| = \max\limits_n |\alpha|$. Atunci bila $\{\alpha \mid \|\alpha\| < 1\}$ nu are nici un punct extremal (lăsăm în seama cititorului verificarea, relativ simplă, a acestei afirmații).

Pînă în prezent am considerat doar proprietăți algebrice, sau geometrice, topologia intervenind doar în cazul cunoscut al spațiului R^n. Cu această ocazie am făcut o serie de observații, care ne vor sluji ca model pentru o teorie generală. Mai precis, vom da definiția noțiunii de spațiu vectorial topologic și apoi vom considera, în paragraful următor, două teoreme cu caracter geometric, care au numeroase aplicații în analiză. În capitolele următoare vom studia mai detaliat unele exemple de astfel de spații, arătînd în ce mod ideile geometrice permit o interpretare naturală a diferitelor rezultate ale analizei. O teorie mai amănunțită a acestor chestiuni depășește cadrul volumului, dar cititorul care parcurge cu atenție chestiunile pe care le vom trata, nu va avea dificultăți în abordarea unei expuneri sistematice a spațiilor vectoriale topologice, local convexe (pe scurt: spații local convexe).

Ca mai întotdeauna, ordinea logică (de la general la particular) nu coincide cu ordinea cronologică a apariției noțiunilor. Primele spații local convexe au fost de tipuri speciale, dar foarte importante, și au apărut în legătură cu probleme

David Hilbert
(1862—1943)



de analiză. David Hilbert, care a lăsat amprenta geniului său în cele mai variate şi importante domenii ale matematicii, a remarcat că studiul ecuaţiilor integrale capătă un cadru natural şi o rezolvare mai simplă, dacă se utilizează unele idei geometrice. Lui i se datoreşte noţiunea de spaţiu ce-i poartă astăzi numele: spaţiul Hilbert. Studiul acestor spaţii a fost adîncit de elevii lui Hilbert şi de M. Frechet şi F. Riesz. Puţin mai tîrziu, în lucrările lui St. Banach şi H. Hahn se defineşte noţiunea generală de spaţiu normat. Apariţia în 1932 a cărţii matematicianului polonez Stefan Banach, *Théorie des opérations liniaires*, marchează un moment important în istoria analizei funcţionale: momentul maturizării. Studiul unor spaţii generale arată că noţiunea de convexitate joacă un rol deosebit. J. von Neuman dă, în 1935, definiţia generală a spaţiilor vectoriale local convexe. Cele mai de seamă rezultate în studiul aces-



Stefan Banach
(1892—1945)

tor spații sînt legate de numele lui G. W. Mackey, J. Dieudonné, L. Schwartz, A. Grothendieck.

Încheiem cu regret aceste prea scurte considerații istorice, pentru a ne întoarce la lucruri mai precise.

Un spațiu vectorial local convex este un spațiu vectorial E, înzestrat cu o topologie față de care operațiile de adunare $(x, y) \to x + y$ și de înmulțire cu scalarii $(\lambda, x) \to \lambda x$ sînt continue, fiecare punct al spațiului avînd un sistem fundamental de vecinătăți convexe. (Dacă nu se mai cere ultima condiție, spațiul se numește vectorial topologic.) Am văzut că R^n, considerat ca spațiu vectorial cu topologia naturală, verifică toate aceste condiții.

Să vedem ce concluzii putem trage din continuitatea operațiilor. Mai întîi din continuitatea adunării în origine: pentru orice vecinătate U a originii există o vecinătate W

astfel încît $W + W \subset U$. Continuitatea înmulțirii cu scalari conduce la proprietatea următoare: pentru orice vecinătate U a originii, și pentru orice element x dat, din E, $x \neq 0$, există un $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ să avem $\lambda x \in U$. Într-adevăr, este suficient să remarcăm că $0 \cdot x = 0$ pentru orice $x \in E$ și să aplicăm definiția continuității în punctul $(0, x)$.

Dacă A este o mulțime deschisă, atunci orice translatată a sa, $x + A$, și orice omotetică a sa λA (cu $\lambda \neq 0$) sînt deschise.

În particular, într-un spațiu vectorial topologic topologia este complet determinată, dacă se cunoaște un sistem fundamental de vecinătăți al originii. Vom arăta acum că se poate alege un sistem fundamental de vecinătăți al originii cu anumite proprietăți suplimentare (convexitatea încă nu intervine). Anume, să remarcăm mai întîi că din continuitatea adunării rezultă faptul următor: dacă A este o mulțime oarecare, atunci $\bar{A} = \bigcap (A + V)$, unde V parcurge toate vecinătățile originii (se obține același rezultat, dacă V parcurge un sistem fundamental de vecinătăți al originii).

Demonstrație. Fie $y \in \bar{A}$ și V o vecinătate oarecare a originii. Atunci $-V$ va fi tot o vecinătate a originii, iar $y - V$ va fi o vecinătate a lui y; există deci $x \in A \cap (y - V)$. Aceasta înseamnă însă că $y \in A + V$, deci $\bar{A} \subset A + V$; cum V este o vecinătate arbitrară, atunci $\bar{A} \subset \bigcap (A + V)$. Reciproc, $y \in \bigcap (A + V)$ ne spune că $y - V$ conține puncte din A pentru orice V, deci $y \in \bar{A}$. q.e.d.

De aici rezultă, în particular, că originea are un sistem fundamental de vecinătăți închise, căci, pentru orice vecinătate U a originii, există W (de asemenea, vecinătate a originii), astfel încît $W + W \subset U$; dar luînd $A = W$ și aplicînd rezultatul de mai înainte, se obține $\bar{W} \subset W + W \subset U$, adică ceea ce trebuia arătat.

Fie W o mulțime cu proprietatea: $|\lambda| \leqslant 1$ implică $\lambda W \subset W$. Să demonstrăm că și $\bar{W}$ are aceeași proprietate. Pentru aceasta vom utiliza următoarea proprietate generală a funcțiilor continue: dacă f este continuă, atunci $f(\bar{M}) \subset \overline{f(M)}$ pentru orice mulțime M (cuprinsă în domeniul

de definiţie al lui f, bineînţeles) şi reciproc. Demonstraţia acestei proprietăţi se face imediat: trebuie arătat că imaginea inversă a oricărei mulţimi închise este *închisă*. Fie deci $A = \bar{A}$ şi $f^{-1}(A) = M$. Avem (din ipoteză) $f(\bar{M}) \subset \overline{f(M)} = \overline{f(f^{-1}(A))} = \bar{A} = A$. Dar $M \subset \bar{M}$ implică $f(M) \subset f(\bar{M})$ şi, cum $f(M) = A$, $f(\bar{M}) \supset A$, deci $f(\bar{M}) = A$ şi deci $\bar{M} \subset f^{-1}(A) = M$, prin urmare $\bar{M} = M$. Am arătat că proprietatea $f(\bar{M}) \subset \overline{f(M)}$, pentru orice mulţime M cuprinsă în domeniul de definiţie al funcţiei f, implică continuitatea; reciproc, dacă f este continuă, avem (utilizînd notaţia $f(M) = A$) $\overline{f(M)} = \bar{A}$, deci $f^{-1}(\bar{A})$ va fi închisă (din continuitatea lui f) şi $M \subset f^{-1}(\bar{A})$, prin urmare şi $\bar{M} \subset f^{-1}(\bar{A})$; aplicînd pe f, găsim $f(\bar{M}) \subset f(f^{-1}(\bar{A})) = \bar{A} = \overline{f(M)}$, q.e.d.

Utilizînd acum proprietatea aceasta în cazul aplicaţiei (continue) $(\lambda, x) \to x$, definită pe $\{|\lambda| \leqslant 1\} \times W$ cu valori în W, se obţine că $\lambda\bar{W} \subset \bar{W}$ pentru $|\lambda| \leqslant 1$.

Aceeaşi proprietate a continuităţii, aplicată funcţiei $(x, y) \to \lambda x + (1-\lambda)y$ (cu $\lambda \in [0,1]$) definită pe $A \times A$ cu valori în A (A convexă), arată că aplicaţia de mai sus conduce de la $\bar{A} \times \bar{A}$ la $\bar{A}$, deci că închiderea $\bar{A}$ a unei mulţimi convexe A este de asemenea convexă.

Toate aceste proprietăţi ne permit să deducem existenţa unui sistem fundamental de vecinătăţi al originii, să-l notăm cu B, cu următoarele proprietăţi (spaţiul E este presupus local conex):

1° Orice $U \in B$ este închis şi conex;

2° $|\lambda| \leqslant 1$ şi $V \in B$, implică $\lambda V \subset V$;

3° pentru orice $V \in B$ există $W \in B$, cu $W + W \subset V$;

4° orice $V \in B$ este absorbant.

Într-adevăr, fie B' un sistem fundamental de vecinătăţi convexe ale originii (există un astfel de sistem). Fie apoi B'' un sistem fundamental de vecinătăţi închise ale originii. Atunci sistemul ale cărui vecinătăţi sînt mulţimile ch(V), cu V parcurgînd pe B'', va fi un sistem fundamental de vecinătăţi închise şi conexe (de ce?). Să notăm cu B''' acest nou sistem fundamental de vecinătăţi.

Fie $U \in B''$; continuitatea înmulțirii cu scalarii conduce la existența unui $\varepsilon > 0$ și a unei vecinătăți W, astfel încît $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ și $x \in W$ să implice $\lambda x \in U$ și putem presupune că $W \in B'''$. Dacă $V = \bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} \lambda W$, este evident că $V \subset U$ și că $|\lambda| \leqslant 1$ implică $\lambda V \subset V$; $\overline{V}$ se va bucura de aceleași proprietăți (căci $\overline{V} \subset \overline{U}$, dar $U = \overline{U}$ pentru că $U \in B'''$). Luînd acum înfășurătoarea convexă $\mathrm{ch}(V) = V'$ și apoi închiderea acesteia, obținem o mulțime convexă, închisă, cu proprietatea că $\lambda \overline{V}' \subset \overline{V}'$ și $\overline{V}' \subset U$ (căci U este convexă și închisă). Sistemul acestor $\overline{V}'$ va fi sistemul B căutat. Construcția lui, fără a prezenta dificultăți esențiale, a necesitat totuși o oarecare grijă.

Reciproc, dacă se consideră pe E un sistem B, care verifică proprietățile 1°, 2°, 3°, și 4°, care nu conține mulțimea vidă și astfel încît, pentru orice U, $V \in B$, să existe $W \in B$ verificînd $W \subset U \cap V$ (aceste două proprietăți erau automat verificate mai sus, căci B era un sistem fundamental de vecinătăți), atunci există pe E o topologie (și numai una singură) local convexă, care are pe B ca sistem fundamental de vecinătăți al originii.

Vom vedea acum un mod mai concret de a introduce o topologie local convexă pe un spațiu vectorial. Pentru aceasta este necesar un fapt pregătitor. Fie U o vecinătate convexă a originii, pe care o presupunem simetrică (i.e. $U = -U$). U fiind o vecinătate, ea este absorbantă; mai mult; pentru orice $x \in E$ există un $\varepsilon > 0$ astfel încît $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ să implice $\lambda x \in U$, ceea ce este echivalent cu $x \in kU$, unde $k = \frac{1}{|\lambda|} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Să considerăm acum funcția $p_U(x) = \inf \{k \mid x \in kU\}$ (k presupus pozitiv). Atunci funcția p_U are următoarele proprietăți:

1° $p_U(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E$ (rezultă din însăși definiția lui p_U);

2° $p_U(\alpha x) = |\alpha| \, p_U(x)$;

3° $p_U(x + y) \leqslant p_U(x) + p_U(y)$.

Demonstrația proprietății 2°. $p_U(\alpha x) = \inf. \{k \mid \alpha x \in kU\}$. Dar $\alpha x \in kU$ este echivalent cu $|\alpha| \, x \in kU$ (în virtutea

simetriei lui U) sau cu $x \in \frac{k}{|\alpha|} U$, deci $p_U(x) = \frac{p_U(\alpha x)}{|\alpha|}$ (am presupus $\alpha \neq 0$; în cazul $\alpha = 0$ ambii membri ai egalității sînt nuli). Dacă U nu ar fi fost simetrică, atunci am fi găsit că $p_U(\alpha x) = \alpha p_U(x)$ pentru orice $\alpha > 0$.

Demonstrația proprietății 3°. Pentru aceasta trebuie să utilizăm convexitatea lui U. Fie x, y două puncte arbitrare din E, fixate însă în cele ce urmează, și k_1, k_2 numere, astfel încît $x \in k_1 U$ și $y \in k_2 U$, deci $x = k_1 x'$ și $y = k_2 y'$, cu x', $y' \in U$. Atunci

$$x + y = k_1 x' + k_2 y' = (k_1 + k_2)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} x' + \frac{k_2}{k_1 + k_2} y'\right).$$

Dar $\frac{k_1}{k_1 + k_2}$ și $\frac{k_2}{k_1 + k_2}$ sînt numere pozitive, suma lor este 1, $x', y' \in U$, deci $\frac{k_1}{k_1 + k_2} x' + \frac{k_2}{k_1 + k_2} y' \in U$. Prin urmare $x + y \in (k_1 + k_2) U$. În concluzie, pentru orice pereche de numere k_1 și k_2, astfel încît $p_U(x) \leqslant k_1$, $p_U(y) \leqslant k_2$, rezultă $p_U(x + y) \leqslant k_1 + k_2$.

De aici se deduce 3°.

Se verifică imediat că mulțimea $\{x \mid p_U(x) \leqslant 1\}$ coincide cu U (dacă U este o vecinătate convexă simetrică închisă) și că relația $p_U(x) \leqslant p_V(x)$, pentru orice x, implică $V \subset U$ și reciproc.

Rezultă, deci, că putem defini și topologia pe E cunoscînd funcțiile p_U. Reciproc, dacă se dă o familie de funcții (p_α, $\alpha \in I$) ce verifică condițiile 1°, 2°, 3°, mulțimea intersecțiilor finite de mulțimi de forma $U_{\alpha, \varepsilon} = \{x \mid p_\alpha(x) < \varepsilon\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăți pentru o topologie local convexă pe E. De obicei se cere ca această familie de funcții să verifice condiția suplimentară: pentru orice $x \in E$ există un indice α, astfel încît $p_\alpha(x) \neq 0$. Această condiție ne asigură că spațiul topologic E este separat. O funcție p definită pe E, cu valori nenegative și care verifică proprietățile 1°, 2°, 3°, de mai sus, se numește *semi-*

normă. Dacă, în plus, din $p(x) = 0$ se deduce $x = 0$, se zice că p este o *normă*. O ultimă observație: o seminormă este o funcție convexă, în sensul definiției date în capitolul II. Cu aceasta se justifică, *aposteriori*, definiția dată acolo.

Dualitate și compacitate

Numeroase probleme de matematică au scos în evidență importanța funcționalelor liniare și, mai general, a aplicațiilor liniare. În cele ce urmează vom indica unele rezultate legate de noțiunea de funcțională liniară și vom demonstra o teoremă fundamentală, teorema lui Hahn-Banach, unele aplicații ale acestei teoreme fiind date în capitolele următoare.

O formă liniară pe un spațiu vectorial E este o aplicație definită pe E cu valori în corpul scalarilor (deci în R sau C, după cum spațiul E este real sau complex) cu proprietățile:

1° $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

2° $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

În locul termenului de formă liniară se utilizează adesea și cel de funcțională liniară. Mulțimea funcționalelor liniare pe un spațiu topologic E se notează cu E^* și se numește *dualul* (algebric) a lui E; E^* este desigur un spațiu vectorial.

Dacă pe E s-a introdus o topologie local convexă, are sens să se vorbească de funcționale liniare și *continue*; mulțimea acestora se numește dualul (topologic) al lui E și se notează cu E'. În analiză și în analiza funcțională se consideră doar dualul topologic E' și deci în continuare nu se va mai specifica despre care dual este vorba, subînțelegîndu-se că este vorba de spațiul funcționalelor continue.

Să vedem ce se poate spune despre dualul lui R^n (considerații analoge se pot face pentru C^n).

Ei bine, orice formă liniară pe R^n este *continuă*. Într-adevăr, dacă f este o formă liniară oarecare, pentru a o cu-

noaște este suficient să cunoaștem valorile pe care le ia f pe o bază oarecare $\{e_n\}$ a lui R^n, căci dacă $c_i = f(e_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, atunci orice x din R^n este de forma $x = \sum_i \lambda_i e_i$, deci $f(x) = f(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i f(e_i) = \sum \lambda_i c_i$. Continuitatea rezultă imediat: dacă $x \to x_0$, atunci coordonatele lui x în baza $\{e_i\}$ tind către cele ale lui x_0, deci $f(x) \to f(x_0)$. De fapt, pentru a demonstra continuitatea unei forme liniare este suficient să se arate continuitatea în origine, căci $f(x) - f(x_0) = f(x - x_0)$, proprietate pe care o vom utiliza esențial în cele ce urmează. Dualul lui R^n este un spațiu vectorial n-dimensional și, ca atare, se poate identifica cu R^n. Într-adevăr, fie f_i funcționala definită astfel: $f_i(e_i) = 1$, $f_i(e_j) = 0$ pentru $j \neq i$ (am văzut că este suficient ca o funcțională să fie definită pe o bază). Atunci este clar că orice altă funcțională f se exprimă (în mod unic) ca o combinație liniară a formelor f_i $(i = 1, \ldots, n)$, $f = \sum c_i f_i$. Dacă fiecărei funcționale liniare pe R^n îi atașăm valorile pe care le ia respectiva funcțională pe o bază $e_i, \ldots, e_n$ a lui R^n, arbitrară dar aceeași pentru orice funcțională, se obține o corespondență biunivocă între dualul lui R^n și R^n, corespondență ce este un izomorfism algebric.

Matematicianul sovietic A. N. Tihonov a arătat (la începuturile teoriei spațiilor local convexe) că orice spațiu local convex de dimensiune finită este izomorf (topologic) cu R^n. Cu alte cuvinte, topologia sa este aceeași cu cea a lui R^n.

Să vedem cum arată mulțimea $f^{-1}(0)$, f fiind o funcțională liniară neidentic nulă. În primul rînd este evident că $N = f^{-1}(0)$ este un subspațiu vectorial, dar, mai mult, N este un subspațiu maximal (adică nu există nici un alt subspațiu M cu $N \subset M$, $N \neq M$ și M diferit de spațiul total). Într-adevăr, $f \neq 0$, deci există $x_0 \notin N$, i.e. $f(x_0) \neq 0$. Fie x un element oarecare din R^n; atunci $f(x) = \lambda$ (λ, eventual, poate fi zero). Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $\lambda = \mu f(x_0)$, deci $f(x) = f(\mu x_0)$, deci $f(x - \mu x_0) = 0$, i.e. $x - \mu x_0 \in N$, prin urmare $x = \mu x_0 + y$, cu $y \in N$. Cu alte cuvinte, spațiul R^n apare ca suma dintre N („nucleul lui f") și un spațiu de dimensiune 1, spațiul generat de x_0. Se spune că N este de

„codimensiune 1“, aceasta revenind la faptul că dacă se consideră drept relație de echivalență $x \sim y$ relația $x - y \in N$, mulțimea-cît (adică mulțimea claselor de echivalență) R^n/N, care poate fi organizată în mod natural ca un spațiu vectorial, este de dimensiune 1. Afirmația aceasta nu este legată de R^n, ci este valabilă în general.

Fie acum E un spațiu local convex de dimensiune infinită. Prima problemă care se pune este dacă există funcționale liniare care să nu fie continue. A doua problemă (mai importantă) este dacă există funcționale liniare continue neidentic nule. În sfîrșit, a treia problemă este problema prelungirii, despre care vom discuta mai amănunțit puțin mai departe. Existența funcționalelor liniare continue nebanale ($\neq 0$) este legată de proprietatea de locală convexitate. Există spații (care *nu sînt* local convexe) în care nu există nici o funcțională liniară continuă (cu excepția funcționalei $x \to 0$). Dacă spațiul este local convex, atunci, după cum vom vedea imediat, există întotdeauna astfel de funcționale. Proprietatea unei funcționale liniare pe un spațiu E, de a fi continuă se poate exprima într-un mod foarte simplu. Știm că este suficientă continuitatea în origine. Cum $f(0) = 0$ (căci $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = f(0)$), aceasta revine la următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate U a originii, astfel încît $x \in U$ să implice $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. Putem alege o vecinătate V simetrică și închisă, $V \subset U$ și atunci proprietatea de mai sus revine la $|f(x)| \leqslant \varepsilon p_V(x)$ pentru orice $x \in V$. Cum, pentru un x oarecare, $x = \lambda y$ cu $y \in V$, $f(x) = f(\lambda y)$, prin urmare $|f(x)| \leqslant \varepsilon |\lambda| \, p_V(y) = \varepsilon \, p_V(x)$. Putem deci enunța: o condiție necesară și suficientă pentru ca o funcțională liniară $f(x)$ să fie continuă este ca să existe o constantă M și o seminormă continuă p pe E, astfel încît $|f(x)| \leqslant Mp(x)$ pentru orice $x \in E$. Am arătat mai înainte necesitatea acestei condiții (căci, desigur p_V, V vecinătate simetrică, este continuă pe E!). Suficiența rezultă imediat.

Putem trece la problema prelungirii funcționalelor liniare. Anume, fiind dat un spațiu vectorial (local convex)

E, un subspaţiu al său M şi o funcţională liniară f, definită pe M şi continuă pe M (aceasta are sens, căci M este înzestrat cu topologia indusă, care este evident local convexă), problema care se pune este de a prelungi această funcţională pe întreg spaţiul E (adică a găsi o funcţională liniară F definită pe E, continuă pe E şi astfel ca restricţia* lui F la M să coincidă cu f). Răspunsul la această problemă este dat de teorema lui Hahn-Banach.

Teoremă (Hahn-Banach). Dacă E este un spaţiu, M un subspaţiu vectorial al său, $p(x)$ o seminormă pe E şi f o formă liniară definită pe M, verificînd relaţia $|f(x)| \leqslant \leqslant p(x)$ pentru orice $x \in M$, atunci există o formă liniară F pe E, astfel încît $|F(x)| < p(x)$ pentru orice $x \in E$ şi care prelungeşte pe f (i.e. restricţia lui F la M coincide cu f).

Demonstraţie. A) Vom trata mai întîi cazul în care E este spaţiul vectorial real (adică corpul scalarilor este R).

Demonstraţia se împarte în două etape.

I) Fie x_0 un punct din E, $x_0 \notin M$. Să încercăm să prelungim pe f pe spaţiul generat de M şi x_0, alegînd convenabil pe $F(x_0) = \alpha$. Apoi definim $F(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$ pentru orice λ, şi astfel a fost obţinută prelungirea. Dar α trebuie ales astfel, încît $|F(x + \lambda x_0)| < p(x + \lambda x_0)$ pentru orice $x \in M$ şi orice $\lambda \neq 0$.

Putem împărţi cu λ, $\left|F\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right)\right| < p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right)$ şi, făcînd notaţia $x_1 = \frac{x}{\lambda} \in M$, găsim $|F(x_1 + x_0)| < p(x_1 + + x_0)$, x_1 fiind un element oarecare din M, sau, ţinînd seama că $F(x_1 + x_0) = F(x_1) + \alpha = f(x_1) + \alpha$, avem $- p(x_1 + x_0) - F(x_1) \leqslant \alpha \leqslant p(x_1 + x_0) - F(x_1)$.

---

* Dacă f este o funcţie definită pe M, iar N este o submulţime a lui M, atunci *restricţia* lui f la N (notaţie: $f|_N$) se numeşte funcţia ce se obţine considerînd aplicaţia $x \to f(x)$ definită doar pentru acei x care aparţin lui N.

Deci numărul α va trebui să verifice aceste inegalități pentru orice $x_1 \in M$, deci va trebui ca

$$\sup_{x_1 \in M} (-p(x_1 + x_0) - f(x_1)) = m' \leqslant \alpha$$

și

$$\inf_{x_1 \in M} (p(x_1 + x_0) - f(x_1)) = m'' \geqslant \alpha.$$

Dacă arătăm că $m' \leqslant m''$, orice α cuprins între m' și m'' va verifica condiția aceasta, deci putem prelungi pe f la spațiul M' generat de M și x_0.

Este suficient să arătăm că pentru orice y și z din M avem

$$-p(z + x_0) - f(z) \leqslant p(y + x_0) - f(y),$$

sau, ceea ce este echivalent, $f(y) - f(z) \leqslant p(y + x_0) + p(z + x_0)$. Dar $f(y) - f(z) = f(y - z) \leqslant p(y - z) = p((y + x_0) - (x_0 + z)) \leqslant p(y + x_0) + p(x_0 + z)$. Cu aceasta se încheie prima etapă.

II. În a doua etapă intervine o lemă importantă, numită *lema lui Zorn*, privind mulțimile ordonate.

Se spune că pe o mulțime X s-a definit o relație de ordine, dacă pe $X \times X$ s-a definit o relație, notată $\leqslant$, astfel încît:

1° $x \leqslant x$;

2° dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$, atunci $x = y$;

3° dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$.

Această relație nu este neapărat definită pentru toate perechile de elemente ale mulțimii, cele pentru care ea nu este definită numindu-se elemente incomparabile. Un exemplu simplu de relație de ordine este furnizat de relația de incluziune, $A \subset B$ a părților unei mulțimi X. Evident că proprietățile 1°, 2°, 3°, sînt verificate, dar că (dacă X nu este redus la un punct) există elemente incomparabile, adică mulțimi A și B care nu verifică nici $A \subset B$ nici $B \subset A$.

O familie $\mathcal{F}$ de elemente ale lui X se numește *total ordonată*, dacă orice două elemente din $\mathcal{F}$ sînt comparabile. Mar-

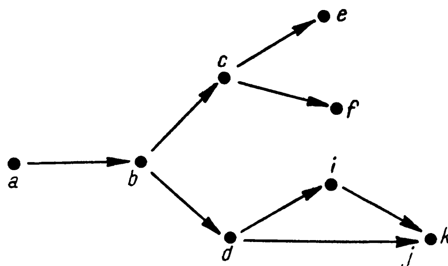


Fig. 8.

ginea superioară a unei părți total ordonate $\mathcal{F}$ a lui X, este un element x_0 cu proprietățile:

1° $x_0 \geqslant x$ pentru orice $x \in \mathcal{F}$;

2° orice element z verificînd $z \geqslant x$ pentru orice $x \in \mathcal{F}$ este „mai mare" ca x_0, i. e. $z \geqslant x_0$.

Bineînțeles, avînd o parte total ordonată a mulțimii X, nimic nu asigură *apriori*, existența unei margini superioare. Se spune că mulțimea X este *inductivă*, dacă orice parte total ordonată a sa *are* o margine superioară.

În X (mulțime ordonată) un element x_0 se numește *maximal*, dacă orice element x comparabil cu x_0 verifică $x \leqslant x_0$. În fig. 8 este dat un exemplu simplu de mulțime parțial ordonată, relația de ordine fiind definită astfel: $x \leqslant y$ dacă se poate trece de la x la y prin săgeți $\rightarrow$.

Lema lui Zorn afirmă că în orice mulțime X inductivă există elemente maximale.

Cum vom aplica această lemă? Mulțimea X va fi mulțimea prelungirilor lui f și relația de ordine va fi relația de incluziune. Mai precis, două prelungiri F_1 și F_2 ale lui f (ambele verificînd, acolo unde sînt definite, $|F_i(x)| \leqslant p(x)$) sînt în relația $F_1 \leqslant F_2$, dacă subspațiile M_1 și M_2, pe care sînt definite F_1 și respectiv F_2, sînt în relația $M_1 \subset M_2$ și $F_1 = F_2$ pe M_1. Mulțimea noastră este inductivă, căci, avînd o familie total ordonată $\mathcal{F}$ de prelungiri este suficient să luăm reuniunea subspațiilor pe care sînt ele definite, pentru a obține o margine superioară, adică o prelungire care să majoreze (în sensul relației de ordine indicate)

orice altă prelungire aparținînd familiei $\mathcal{F}$. Lema lui Zorn ne asigură existența unei *prelungiri maximale*; această prelungire va fi în mod necesar definită pe întreg spațiul (căci în cazul contrar repetăm raționamentul făcut la punctul I și am putea continua prelungirea, deci prelungirea considerată n-ar mai fi maximală).

Mai rămîne trecerea la cazul spațiilor vectoriale peste C. Un astfel de spațiu este, automat, și un spațiu vectorial peste R (restrîngînd mulțimea scalarilor). Se folosește în continuare următoarea observație: dacă f este o formă liniară pe E (E spațiu vectorial peste C), atunci $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, cu f_1 și f_2 numere reale pentru fiecare $x \in E$.

Dar din $f(x+y) = f_1(x+y) + if_2(x+y) = f(x) + f(y) = f_1(x) + f_1(y) + i(f_2(x) + f_2(y))$ rezultă că f_1 și f_2 sînt forme liniare reale (omogenitatea lui f_1 și f_2 față de scalarii reali se demonstrează analog). Mai mult, $f_1(ix) = -f_2(x)$ pentru orice x (căci $if(x) = f_1(ix) + if_2(x)$; dar $if(x)$ este egal și cu $if_1(x) + f_2(x) = if_1(x) - f_2(x)$).

Fie acum $f(x)$ definită pe un subspațiu M și verificînd, pentru orice $x \in M$, relația $|f(x)| \leqslant p(x)$ ($p(x)$ fiind o seminormă pe E). Atunci și $|f_1(x)| \leqslant p(x)$, deci, conform celor arătate mai înainte, $f_1(x)$ (ca formă liniară reală) poate fi prelungită pe întreg E într-o formă reală $F_1(x)$ și $|F_1(x)| \leqslant p(x)$. Fie $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$. Cum $F(ix) = iF(x)$ (căci $F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = iF_1(x) + F_1(ix) = i(F_1(x) - iF_1(ix)) = iF(x)$), forma F este liniară și omogenă și față de scalarii $\lambda \in C$. Desigur că $F(x) = f(x)$ pe M. Rămîne doar de arătat că $|F(x)| \leqslant p(x)$. În general, $F(x)$ este un număr complex, de argument θ (dacă $F(x) \neq 0$). Înmulțim pe $F(x)$ cu $e^{-i\theta}$. Atunci $e^{-i\theta} F(x)$ va fi un număr real pozitiv. În plus, $e^{-i\theta} F(x) = F(e^{-i\theta}x) = F_1(e^{-i\theta}x)$ (căci partea imaginară a lui $F(e^{-i\theta}x)$ e nulă); dar, conform construcției, $|F_1(x)| \leqslant p(x)$, deci $|F_1(e^{-i\theta}x)| \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x)$ și deci $|F(x)| = |e^{-i\theta} F(x)| \leqslant p(x)$ pentru orice $x \in E$, q.e.d.

Remarcați că în enunțul dat nu apare continuitatea funcționalei f. Dacă însă spațiul E este local convex și $p(x)$

este o seminormă continuă atunci obținem imediat răspunsul, căci funcționala prelungită va fi și ea continuă.

Cîteva consecințe:

1° Fie $x_0 \neq 0$; există atunci o funcțională liniară continuă F, definită pe E astfel ca $F(x_0) \neq 0$. Într-adevăr, există cel puțin o seminormă p (din cele care definesc topologia local convexă a spațiului E), astfel încît $p(x_0) \neq 0$. Este suficient să definim $f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ pe spațiul (unidimensional) generat de x_0 și să aplicăm teorema lui Hahn-Banach.

În particular, dacă $x_0 \in E$ este astfel încît $f(x_0) = 0$ pentru orice formă liniară continuă pe E, rezultă că $x_0 = 0$.

2° Fie M un subspațiu închis al lui E și x_0 un punct care nu aparține lui M. Există atunci o funcțională liniară continuă f pe E, astfel încît $f = 0$ pe M și $f(x_0) = 1$.

M fiind închis, pentru orice $x \notin M$, există o vecinătate U a lui x, astfel încît $U \cap M = \emptyset$. Putem alege deci o vecinătate U_0 a lui x_0, disjunctă pe M și astfel ca $U_0 = \{x \mid p_{U_0}(x - x_0) < 1\}$. Pentru orice $y \in M$, avem $p_{U_0}(y - x_0) \geqslant 1$, sau, scriind $-y$ în loc de y, $p_{U_0}(y + x_0) \geqslant 1$.

Fie N spațiul generat de M și de x_0; orice element x din N se va scrie deci în mod unic $x = y + x_0$, cu $y \in M$. Pe N definim o funcțională liniară astfel: $f(x) = f(y + \lambda x_0) = \lambda$. Este clar că $f = 0$ pe M și că $f(x_0) = 1$. În plus, $|f(x)| \leqslant p_{U_0}(x)$, căci $p_{U_0}(y + \lambda x_0) = |\lambda| \, p_{U_0}\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) \geqslant |\lambda|$ (am presupus că $\lambda \neq 0$; în cazul $\lambda = 0$, $f(x) = 0$, deci $|f(x)| \leqslant p_U(x)$ este evident verificată) pentru că $p_{U_0}\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) \geqslant 1$ în virtutea faptului că $\frac{y}{\lambda} \in M$. Cum $|\lambda| = f(x)$, inegalitatea este demonstrată. Aplicăm teorema lui Hahn-Banach, de unde rezultă concluzia căutată.

3° Un subspațiu M al unui spațiu local convex E este dens în E (adică $\overline{M} = E$), dacă orice funcțională liniară continuă pe E, nulă pe M, este identic nulă pe întreg E, și reciproc.

Dacă M n-ar fi dens, $\overline{M}$ ar fi un subspațiu închis, diferit de E și orice funcțională liniară continuă pe E, nulă pe M, ar fi identic nulă și pe $\overline{M}$; dar, aplicînd consecința 2°, vedem că există funcționale continue, nule pe $\overline{M}$ și neidentic nule, de unde rezultă 3°.

4° Teorema lui Hahn-Banach permite și obținerea unor rezultate de „separare" referitoare la mulțimile convexe. Mai precis, fie E un spațiu local convex *real*, M o mulțime convexă, închisă, $0 \in M$ (în particular M poate fi orice subspațiu închis). Atunci, pentru orice $x_0 \notin M$ există o formă liniară continuă, definită pe E, astfel ca $f_0(x_0) = 1$ și $f_0(x) \leqslant 1$ pentru orice $x \in M$.

Vom da acum un alt rezultat important, privind punctele extremale ale unei mulțimi compacte convexe, care se sprijină în esență pe teorema lui Hahn-Banach și pe lema lui Zorn.

Fie A o mulțime oarecare a unui spațiu local convex E. Știm ce este înfășurătoarea sa convexă $\mathrm{ch}(A)$; înfășurătoarea sa convexă închisă este — prin definiție — cea mai mică mulțime convexă și închisă care conține pe A. Cum închiderea unei mulțimi convexe este convexă, rezultă că această înfășurătoare convexă închisă nu este altceva decît închiderea lui $\mathrm{ch}(A)$. S-o notăm cu $\Gamma(A)$ (deci $\Gamma(A) = \overline{\mathrm{ch}(A)}$).

Teorema lui Krein-Milman. Fie K o mulțime convexă, compactă, nevidă, dintr-un spațiu local convex E și fie $Ex(K)$ mulțimea punctelor extremale ale lui K. Atunci K este înfășurătoarea convexă închisă a lui ExK, i.e. $K = \Gamma(ExK)$.

Punctele extremale ale unei mulțimi nu formează, nici măcar în cazul simplu al spațiilor euclidiene, o mulțime închisă. Iată un exemplu simplu. Fie un plan, o circumferință Γ în acest plan și fie A și B două puncte situate pe o dreaptă Δ perpendiculară pe planul considerat (fig. 9), dreapta Δ înțepînd planul în punctul C ($C \in \Gamma$). Fie K înfășurătoarea convexă a mulțimii constituite din circumferința Γ și cele două puncte A și B. Se obține, evident, o mulțime convexă și compactă K. Punctele sale extremale vor fi toate punctele circumferinței Γ, cu excepția punctu-

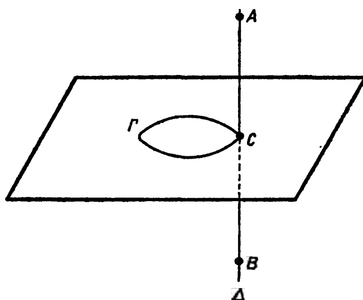


Fig. 9.

lui C, precum și cele două puncte A și B. Deci $Ex(K)$ nu este închisă.

Punctele extremale joacă un rol de seamă și în spațiile finit dimensionale, în probleme de mare utilitate practică. Este vorba de așa-numita programare liniară, care apare foarte frecvent în variate probleme economice, de producție etc. Anume, este vorba de a face minime (sau maxime) anumite expresii, în care intervin un număr finit de parametri, în mod liniar, acești parametri verificînd o serie de inegalități, de asemenea liniare. Dacă fiecărui sistem de valori ale parametrilor ce intervin, îi asociem un punct într-un spațiu cu un număr de dimensiuni egal cu numărul parametrilor, atunci soluțiile căutate apar ca puncte extremale ale anumitor mulțimi din aceste spații. Metodele uzuale ale calculului diferențial nu se pot aplica, punctele de extrem fiind situate pe frontiera domeniilor considerate. Trebuie găsite metode diferite și există o serie întreagă de căi pentru rezolvarea acestui tip de probleme.

Înainte de a încheia acest paragraf vom mai indica două rezultate, legate de compacitate, care de asemenea au importanța lor.

În primul rînd, vă reamintiți desigur de topologia slabă definită de o familie de funcții. Fie E un spațiu local convex, E' dualul său (deci elementele lui E' sînt funcționalele liniare și continue diferite pe E). Fiecărui punct $x \in E$ și fiecărei funcționale $x' \in E'$ îi putem asocia numărul (real

sau complex, după cum E este real sau complex) $x'(x)$ (valoarea funcționalei x' în punctul x) care se mai notează și $< x, x' >$. Acest număr $< x, x' >$ depinde deci și de x și de x'; aplicația $(x, x') \to < x, x' >$ va fi deci o funcție definită pe $E \times E'$, cu valori în R (sau în C). Această funcție de două variabile permite să se introducă pe E și E' două topologii în modul următor: să fixăm pe x; atunci $< x, x' >$ va fi o funcție, definită pe E' cu valori numerice, aceasta pentru fiecare x din E. Topologia slabă indusă de această familie de funcții $< x, x' >$, atunci cînd x parcurge pe E, se numește (e și firesc!) *topologia slabă* a dualului E'. Deci un sistem fundamental de vecinătăți al originii (în E') va fi dat de mulțimile de forma $V(\varepsilon, x_1, \ldots, x_k) = \{x' \mid |< x_j, x' >| < \varepsilon, \ j = 1, \ldots, k\}$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar, iar $x_1, \ldots, x_k$ parcurg toate sistemele arbitrare finite de elemente din E (deci și k ia toate valorile $1, 2, \ldots$).

Desigur, ați remarcat că E' poate fi organizat ca un spațiu vectorial, căci suma a două funcționale liniare și continue, precum și produsul cu un scalar al unei funcționale liniare continue, aparțin de asemenea lui E'.

Am definit astfel pe E' o topologie de spațiu vectorial topologic care este:

1° separată (într-adevăr, dacă x' și y' sînt două elemente din E', $x' \neq y'$, există un punct $x_0 \in E$, astfel încît $x'(x_0) \neq y'(x_0)$; în acest caz, vecinătățile $V_{x'}(\varepsilon, x_0)$ și $V_{y'}(\varepsilon, x_0)$ i.e. mulțimile $\{f' \mid |f'(x_0) - x'(x_0)| < \varepsilon\}$, $\{g' \mid |g'(x_0) - y'(x_0)| < \varepsilon\}$ sînt disjuncte dacă ε este ales suficient de mic);

2° local convexă (aceasta se vede astfel: orice mulțime de forma
$\{x' \mid |< x_0, x' >| < \varepsilon\} = U$ este convexă, căci $x'_1, x'_2 \in U$ implică $|(\lambda x'_1) + (1 - \lambda) x'_2) (x_0)| = |< x_0, \lambda x'_1 + (1 - \lambda) x'_2 >| \leqslant \lambda |< x_0, x'_1 >| + (1 - \lambda) |< x_0, x'_2 >| \leqslant (\lambda + (1 - \lambda)) \varepsilon = \varepsilon$; apoi, orice mulțime $V(\varepsilon, x_1, \ldots, x_k)$ nu este decît intersecția mulțimilor $V(\varepsilon, x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, și rezultă convexă ca intersecție de mulțimi convexe).

Să examinăm iarăşi funcţia $< x, x' >$, presupunînd că x este fix şi că x' variază. Evident că această funcţie, s-o notăm cu $\hat{x}$, definită pe E' cu valori numere, este o funcţională liniară pe E'. Aplicaţia $x \to \hat{x}$ identifică deci pe E cu o parte a dualului algebric $(E')^*$ a lui E'. Dar graţie modului în care s-a introdus topologia pe E', orice funcţională $\hat{x}$ este continuă pe E' (faţă de topologia slabă pe E'). Am identificat astfel pe E cu un subspaţiu al dualului $(E')'$ al spaţiului local convex E'. Cazul cînd, prin această identificare, E coincide cu $(E') = E''$, adică acel caz în care orice funcţională liniară şi continuă pe E' (cu topologia slabă) este de forma $\hat{x}$, are o deosebită importanţă. Spaţiile cu această proprietate se numesc *semireflexive*. Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu să posede această proprietate este cunoscută (şi chiar mai mult), dar nu vom insista asupra acestei chestiuni.

Topologia slabă pe E' poate primi şi o altă interpretare: anume este topologia indusă de topologia produs. Pentru a face o alegere, să presupunem că E este un spaţiu vectorial complex. Atunci E' poate fi considerat ca o submulţime a spaţiului produs $\prod_{x \in E} C_x$, fiecare factor C_x fiind corpul numerelor complexe. Se verifică uşor că topologia slabă este tocmai topologia produs.

Bineînţeles, considerînd pe E ca o parte a dualului lui E', putem introduce pe E (spaţiul iniţial) o topologie slabă, rolurile lui x şi x' din definiţia vecinătăţilor inversîndu-se. Cititorul poate explicita singur topologia aceasta.

Să ne oprim acum asupra unui caz particular, deosebit de important.

Dacă topologia lui E este dată de o singură seminormă $p(x)$ şi dacă $p(x) = 0$ implică $x = 0$, se spune că spaţiul E este *normat* şi se utilizează notaţia $p(x) = \|x\|$. Ştiţi că în acest caz vecinătăţile originii sînt date de bilele $\{x \mid \|x\| < \varepsilon\}$, ε fiind un număr pozitiv arbitrar.

Ce înseamnă că o funcţională liniară x' este continuă pe E? Aceasta revine, în cazul de faţă, la existenţa unui

număr $M < \infty$, astfel încît $|x'(x)| \leqslant M \|x\|$. Cel mai mic număr M pentru care, pentru orice $x \in E$, are loc inegalitatea de mai sus, se numește *norma* funcționalei x' și se notează cu $\|x'\|$. Acest număr se poate defini, în mod echivalent, și ca sup $|x'(x)|$, pentru $\|x\| \leqslant 1$. Deci $\|x'\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} |x'(x)|$. Puteți verifica că avem într-adevăr de-a face cu o normă și deci că, în acest caz, pe dualul E' se poate introduce o topologie de spațiu normat. Mai mult, acest spațiu este *complet*, în sensul că orice șir Cauchy de funcționale x'_n (deci un șir, astfel încît, pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe un rang N cu proprietatea că $m, n > N$ implică $\|x'_n - x'_m\| < \varepsilon$) are o limită. Vom examina cazul spațiilor normate mai amănunțit într-unul din capitolele următoare.

Dar pe E' avem și topologia slabă. Vrem să arătăm că *bila unitate* din dual este compactă față de topologia slabă, sau, cum se spune, *slab compactă*.

Bila considerată, S, este mulțimea acelor x' care verifică $|x'(x)| \leqslant \|x\|$ pentru orice $x \in E$.

Este clar că S este o submulțime a produsului $\prod_{x \in E} S_x$, unde S_x este discul $D_x = \{z \mid |z| \leqslant \|x\|\}$.

Dar acest produs este (cu topologia produs) un spațiu compact, pe baza teoremei lui Tihonov amintită în capitolul precedent.

Pentru a arăta că S este slab compactă ajunge (ținînd seama că topologia slabă este topologia indusă de topologia produs) să arătăm că S este închisă, sau, altfel spus, că din $\xi \in \bar{S}$ rezultă $\xi \in S$. Cine este *apriori* ξ? ξ este o funcție definită pe E, cu valori complexe. Pentru a arăta că ea aparține lui S este necesar și suficient ca ξ să fie liniară și omogenă. Dar aceasta se arată ușor (condiția $|\xi(x)| \leqslant \leqslant \|x\|$ este automat verificată, căci $\xi \in \bar{S}$). Din faptul că $\xi \in \bar{S}$ rezultă că pentru orice vecinătate V a lui ξ există elemente x' din S care aparțin lui V. În particular, aceasta are loc pentru vecinătățile V de forma $V_\xi(\varepsilon, x_1, \ldots, x_k) = \{x' \mid |\xi(x_i) - x'(x_i)| < \varepsilon\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ și va fi suficient să alegem convenabil vecinătățile V_ξ.

Fie deci x, y puncte arbitrare din E. Trebuie arătat că $\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y)$. Alegem un $\varepsilon > 0$ arbitrar și vecinătatea $V(\varepsilon, x, y, x+y) = V$. În V există $x' \in S$, deci, pentru acest x', $|\xi(x) - x'(x)| < \varepsilon$, $|\xi(y) - x'(y)| < \varepsilon$ și $|\xi(x+y) - x'(x+y)| < \varepsilon$. Dar cum $x'(x+y) = x'(x) + x'(y)$, avem în definitiv $|\xi(x+y) - \xi(x) - \xi(y)| = |\xi(x+y) - x'(x+y) + x'(x) + x'(y) - \xi(x) - \xi(y)|$, deci $|\xi(x+y) - \xi(x) - \xi(y)| < 3\varepsilon$. Omogenitatea $\lambda\xi(x) = \xi(\lambda x)$ se demonstrează analog, repetînd raționamentul cu vecinătăți $V(\varepsilon, \lambda x, x)$, deci $\xi \in S$, q.e.d. Rețineți atît faptul, cît și demonstrația, pe care le vom utiliza în cap. VII.

Celălalt fapt, de care amintim și care se demonstrează ușor, ne spune că un spațiu vectorial topologic nu poate avea o vecinătate compactă, decît dacă spațiul este de dimensiune finită. Aceasta face ca o serie de procedee utile, folosite în cazul spațiilor local compacte, să nu poată fi utilizate în cadrul spațiilor vectoriale topologice (și, în particular, în cadrul spațiilor de funcții ce intervin natural în analiza matematică). Demonstrația care urmează, aparține matematicianului A. Gleason și este deosebit de elegantă.

Fie E un spațiu vectorial topologic, presupus local compact. Există deci o vecinătate compactă U a originii. Să notăm cu int U interiorul vecinătății U și să considerăm acoperirea lui U prin mulțimile deschise $x + \frac{1}{2}$ int U (int U fiind deschisă, atunci și λ int U va fi deschisă pentru orice $\lambda \neq 0$). Vecinătatea U fiind compactă, din acoperirea considerată se poate extrage o acoperire finită, deci există $a_1, \ldots, a_m \in U$, astfel încît $\bigcup_{i=1}^{m}\left(a_i + \frac{1}{2} U\right)$ să includă pe U (mulțimile $a_i + \frac{1}{2}$ int U le-am înlocuit prin mulțimile mai mari $a_i + \frac{1}{2} U$). Prin urmare

$$\frac{1}{2^n} U \subset \bigcup_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2^n} a_i + \frac{1}{2^{n+1}} U\right). \qquad \text{(A)}$$

Vom arăta acum că, pentru orice element arbitrar u din U şi pentru orice indice n, există un indice $j(n) \in \{1, \ldots, m\}$, astfel ca $u - a_{j(0)} - \frac{1}{2} a_{j(1)} - \ldots - \frac{1}{2^n} a_{j(n)}$ să aparţină lui $\frac{1}{2^{n+1}} U$. Aceasta se arată prin inducţie. În primul rînd, $u - a_{j(0)} \in \frac{1}{2} U$ este echivalent cu $u \in \frac{1}{2} U + a_{j(0)}$, ceea ce rezultă din (A). În al doilea rînd,

$$u - a_{j(0)} \in \frac{1}{2} U \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{2} a_i + \frac{1}{2^2} U \right).$$

Deci există un element $a_{j(1)}$, astfel încît $u - a_{j(0)} \in \frac{1}{2} a_{j(1)} + \frac{1}{2^2} U$, adică astfel încît $u - a_{j(0)} - \frac{1}{2} a_{j(1)} \in \frac{1}{2^2} U$ etc., şi afirmaţia este demonstrată.

Vom remarca apoi că V fiind o vecinătate arbitrară a originii în E, pentru n destul de mare, $n > N(V)$, avem $\frac{1}{2^n} U \subset V$. Aceasta se datorește faptului că U este compactă şi se demonstrează în modul următor. Se alege o vecinătate W a originii astfel ca:

1° $W + W \subset V$,

2° $\lambda W \subset W$ pentru orice $|\lambda| \leqslant 1$, ceea ce, după cum ştim, este posibil. Se acoperă U cu mulţimile $\{x + W\}$, $x \in U$ şi din compacitatea lui U se deduce că se poate extrage un număr finit de mulţimi $x_1 + W$, $x_2 + W$, ..., ..., $x_p + W$, astfel încît $U \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + W)$. Mulţimea W fiind o vecinătate, pentru orice x din E există un $\lambda_x \neq 0$, astfel încît $\lambda_x x \in W$; în particular, există $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, astfel ca $\lambda_1 x_1 \in W, \ldots, \lambda_p x_p \in W$. Fie $\lambda = \min (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Va rezulta că şi $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p$ vor aparţine lui W şi că, pentru orice $\mu < \lambda$, μx_i $(i = 1, \ldots, p)$ vor aparţine lui W. Fie $N(V)$

cel mai mic întreg pozitiv, astfel ca $\frac{1}{n} < \lambda$ pentru orice $n \geqslant N(V)$. În definitiv, vom avea

$$\frac{1}{2^n} U \subset \bigcup_{i=1}^{p} \frac{1}{2^n} (x_i + W) \subset W + W \subset V$$

pentru $n \geqslant N(V)$, adică tocmai ceea ce trebuia arătat. Dar aceasta implică

$$u - a_{j(0)} - \frac{1}{2} a_{j(1)} - \dots - \frac{1}{2^n} a_{j(n)} \in \frac{1}{2^n} U \subset V,$$

unde V este o vecinătate arbitrară a originii; cu alte cuvinte $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_{j(n)}$. Să ne amintim acum că indicii $j(n)$ nu pot lua decît valori întregi cuprinse între 1 și m, deci că în suma infinită de mai sus apare doar un număr finit de a_i. Notînd $c_i = \sum_{j(n)=1} \frac{1}{2^n}$, găsim că $u = c_1 a_1 + \dots + c_m a_m$ (de remarcat că elementele $a_1, \dots, a_m$ nu depind de u). Dar cum orice element x din E este de forma $x = \lambda_x u$, cu $u \in U$, sezultă că orice element x din E se va scrie ca o combinarie liniară a elementelor $a_1, \dots, a_m$, deci că E este de dimenţiune cel mult m, q.e.d.

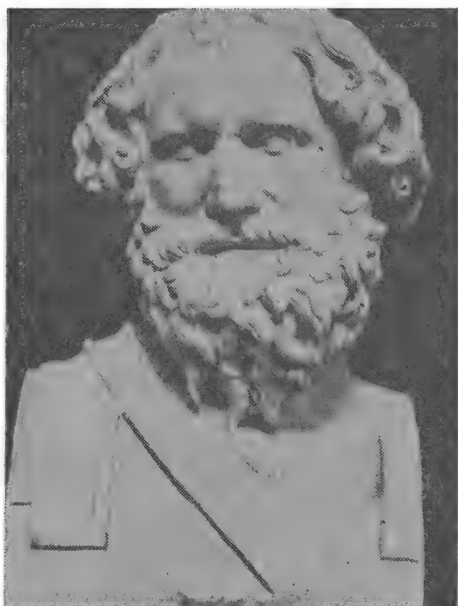
INTEGRALA

De la Arhimede pînă în zilele noastre

După cum indică titlul, acest capitol este consacrat expunerii anumitor aspecte ale teoriei integralei. Presupunem din partea cititorului cunoaşterea materiei ce se cere la examenul de maturitate şi deci că sînt cunoscute anumite noţiuni de calcul integral De asemenea se presupun cunoscute unele elemente din istoria calculului integral.

Acesta este motivul pentru care consideraţiile noastre istorice, mai ales cele privind „epoca eroică" a integralei se vor reduce la minimum. În ceea ce priveşte omiterea unor chestiuni mai fine, ce ţin exclusiv de teoria funcţiilor de o variabilă reală, motivele sînt diferite. Pe de o parte, aceste chestiuni ne-ar abate (cu toată importanţa lor) de la calea aleasă; pe de altă parte, ele sînt expuse amănunţit în alte lucrări în limba română.

Necesitatea de a calcula arii şi volume a fost evidentă încă din antichitate. Posibilitatea era limitată de lipsa unui procedeu general. Arhimede a indicat mai multe metode pentru a calcula aria unui segment de parabolă precum şi porţiunea de arie limitată de spirala ce-i poartă numele. De asemenea, Eudox găsise volumul piramidei şi al conului. Toate acestea erau obţinute cu multă ingeniozitate, dar, matematicienilor de pe atunci, le scăpa faptul că au de-a face cu un procedeu general. De pildă, Arhimede însuşi specifică undeva că problemele relative la spirală „n-au nimic comun" cu altele referitoare la sferă şi la paraboloidul de rotaţie. Procedeele folosite aproximau mărimea cău-



Arhimede
(287—212 î.e.n.)

tată (arie sau volum) prin anumite sume provenite din descompunerea figurii respective sau aproximarea ei cu altele mai simple şi printr-o trecere la limită. De aceea, recunoscîndu-i geniul, pare totuşi exagerat a spune că Arhimede a fost strămoşul calculului integral.

De abia mult mai tîrziu, la începutul secolului al XVII-lea, B. Cavalieri recunoaşte o legătură între aceste chestiuni, legătură pe care o menţionează în tratatul său *Geometria indivizibilelor*. În limbaj modern observaţia sa fundamentală se reduce la faptul următor: dacă se consideră două figuri, date de inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ şi respectiv $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant g(x)$, atunci sumele $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)$ şi $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{ka}{n}\right)$ sînt una faţă de cealaltă într-un raport

Isaac Newton
(1642—1727)



care, pentru n destul de mare, diferă oricît de puţin de raportul ariilor celor două figuri.

În particular, toate problemele de arii şi volume se reduc la cvadraturi, adică la calcule de arii de forma $\int f(x)\mathrm{d}x$, înţelegînd, pentru moment, prin această notaţie aria cuprinsă între axa Ox şi curba $y = f(x)$. Acesta era un progres substanţial!

Dar probleme de „integrare" apar şi în legătură cu alte chestiuni, care nu mai sînt de geometrie, ci de mecanică, ca de pildă la Ch. Huygens în calculul momentelor de inerţie. De altfel, o serie întreagă de matematicieni de seamă ai vremii obţin rezultate în această direcţie.

Progresul esenţial, datorat, independent, lui Newton şi Leibniz, a fost descoperirea legăturii dintre integrală şi



Gottfried-Wilhelm Leibniz (1646—1716)

derivată, ceea ce va permite trecerea de la proprietăţi locale la proprietăţi globale şi dă un mijloc eficace de calcul.

Desigur, chestiuni mai subtile, referitoare la posibilitatea integrării unor funcţii cît mai generale, s-au pus mult mai tîrziu. Pînă şi Fourier, la începutul secolului al XIX-lea îşi baza argumentele pe considerente de arii (ceea ce face ca „demonstraţiile“ sale să aibă adesea doar un caracter euristic). În orice caz, Cauchy este acela care dă teoria integralei pentru funcţiile continue*.

După cum am amintit în legătură cu disputa Euler-Bernoulli, studiul seriilor trigonometrice duce însă la considerarea de funcţii discontinue şi la necesitatea integrării unor asemenea funcţii.

---

* De fapt Cauchy dezvoltă teoria integralei pentru funcţii avînd un număr finit de discontinuităţi.

Cel care a dezvoltat o teorie completă a integralei a fost B. Riemann. El reia raţionamentele lui Cauchy, fără a presupune că funcţia de integrat $f(x)$ este continuă, şi determină proprietăţile lui $f(x)$ care să asigure existenţa integralei cunoscută astăzi sub numele de integrala Riemann. Memoriul său a apărut în 1867, după moartea autorului. Matematicienii aveau acum la îndemînă un instrument precis, cu care se părea că pot lucra fără griji. Dar lucrurile nu erau atît de simple! De pildă, funcţia $\varphi(x)$ definită astfel:

$$\varphi(x) = 1 \text{ pentru } x \text{ raţional,}$$

$$\varphi(x) = 0 \text{ pentru } x \text{ iraţional,}$$

nu poate fi integrată; cu alte cuvinte, lui $\varphi(x)$ nu i se poate aplica construcţia lui Riemann. Se pot da desigur şi alte exemple. O infirmitate gravă a integralei lui Riemann era comportarea sa faţă de trecerea la limită; pentru moment ne mărginim la a spune că această comportare era cu totul incomodă.

Matematicianul francez Henri Lebesgue are meritul de a fi construit o integrală mai generală, adică de a fi dat o definiţie mai generală a integralei, care să coincidă cu integrala Riemann a unei funcţii ori de cîte ori această ultimă integrală avea sens. Implicaţiile pe care le-a avut pentru matematică *apariţia integralei lui Lebesgue sînt imense.* Deşi şi această integrală suferă de unele defecte şi nu rezolvă întru totul problemele pentru care fusese construită, totuşi ea a deschis perspective noi, schimbînd o mare parte din analiza matematică. Integrala lui Lebesgue a fost, la rîndul ei, generalizată. Generalizările au fost de natură diferită: unele (integrala lui Denjoy-Perron) pentru a lărgi clasa funcţiilor integrabile, altele pentru a trece de la funcţii definite în spaţiul euclidian la funcţii definite pe spaţii topologice, sau chiar la mulţimi abstracte, punct de vedere esenţial în teoria probabilităţilor, sau, în sfîrşit, pentru a putea integra funcţii ale căror valori nu erau neapărat numere, ci aparţineau unor spaţii local convexe.

Înainte de a trece la definirea integralei lui Lebesgue vom face cîteva foarte sumare considerații privind integrala Riemann. Fie $f(x)$ o funcție mărginită pe $[a, b]$ și fie m și M marginile sale inferioară și respectiv superioară. Fie apoi o diviziune finită (d) a intervalului $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, cu notația $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, și fie M_k și m_k marginile lui $f(x)$ pe intervalul $[x_{k-1}, x_k]$. Să considerăm sumele $s_d = \sum m_k \Delta_k$ și $S_d = \sum M_k \Delta_k$ (care din punct de vedere geometric reprezintă ariile unor domenii poligonale ce „încadrează" aria mărginită de axa Ox, graficul funcției $f(x)$ și paralelele la axa Oy, duse prin a și b).

Se arată ușor că orice sumă s_d nu poate depăși o sumă oarecare $S_{d'}$ (d și d' fiind diviziuni ale lui $[a, b]$) și deci că marginea superioară a sumelor s_d, cînd d parcurge mulțimea tuturor diviziunilor finite ale lui $[a, b]$, nu poate depăși marginea inferioară a sumelor S_d. Dacă aceste margini sînt egale, valoarea lor comună se notează cu $\int_a^b f(x) dx$. Aceasta este integrala Riemann a funcției $f(x)$ pe $[a, b]$ și se spune că f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Se arată că în acest caz sumele* $\sum f(\xi_k) \Delta_k$, unde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, tind de asemenea către $\int_a^b f(x) dx$, dacă norma diviziunii d tinde către zero. Această normă se notează cu $\nu(d)$ și se definește astfel: $\nu(d)$ este egală cu cel mai mare dintre numerele $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, numere care reprezintă lungimile intervalelor determinate de diviziunea d. Faptul că se consideră doar diviziuni finite, ne asigură că $\nu(d)$ este totdeauna finită. Este evident (puteți face și un mic desen) că, pînă și în cazul unor funcții foarte simple, sumele $\sum f(\xi_k) \Delta_k$ nu vor tinde către $\int_a^b f(x) dx$, dacă $\nu(d)$ nu tinde către zero.

* Numite sume Riemann.

B. Riemann a caracterizat funcţiile cu această proprietate, adică funcţiile „intregabile Riemann". Pentru a exprima această caracterizare în termeni moderni (enunţul sub această formă se datoreşte lui Lebesgue) vom avea nevoie de noţiunea fundamentală de mulţime de măsură nulă.

O mulţime $A \subset R^1$ este de măsură nulă dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, A poate fi acoperită cu un sistem (finit sau numărabil) de intervale, cu proprietatea că suma lungimilor acestor intervale nu depăşeşte pe ε.

Funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă mulţimea punctelor sale de discontinuitate este de măsură nulă, adică dacă f este continuă *aproape peste tot**. Nu vom demonstra această afirmaţie (de altfel demonstraţia nu prezintă dificultăţi), însă vom demonstra următoarea proprietate simplă, dar importantă: reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi de măsură nulă este de măsură nulă. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de măsură nulă. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Acoperim pe A_1 cu intervale de lungime totală mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2}$, pe A_2 cu intervale de lungime cel mult $\frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots$, pe A_n cu intervale de lungime totală ce nu depăşeşte $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Atunci reuniunea tuturor acestor intervale este sigur de lungime totală mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon$ şi acoperă $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, deci proprietatea este demonstrată. Cum orice mulţime redusă la un punct este de măsură nulă, orice mulţime numărabilă posedă această proprietate.

---

* În general, se spune că o proprietate este valabilă *aproape peste tot* pe o mulţime, dacă ea este verificată în toate punctele mulţimii respective, cu excepţia unei submulţimi de măsură nulă. Această exprimare atrage atenţia că, într-un anumit sens, ceea ce are loc pe mulţimi de măsură nulă este *neglijabil*.

Să trecem acum la construcția integralei Lebesgue urmînd metoda lui Riesz, metodă elementară.

Construcția integralei Lebesgue se va face plecînd de la funcțiile în scară. Prin definiție, o funcție $\varphi(x)$, definită pe $[a, b]$, este o *funcție în scară*, dacă există o diviziune finită a intervalului $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, astfel încît, pe (x_k, x_{k+1}), $\varphi(x)$ să fie o constantă C_k (nu interesează cîtuși de puțin valorile pe care le ia $\varphi(x)$ în punctele x_k).

Integrala $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ a funcției în scară $\varphi(x)$ va fi definită ca $\sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1})$ (deci va fi aria determinată de graficul funcției $\varphi(x)$). Desigur că această sumă nu este altceva decît integrala Riemann a lui $\varphi(x)$, dar *apriori* nu avem nevoie de noțiunea de integrală Riemann, ci este suficient să putem defini integrala unei funcții în scară!

Pasul următor va consta în stabilirea a două leme, elementare, de altfel, dar esențiale în cele ce urmează.

1° Pentru orice șir descrescător de funcții în scară nenegative $\{\varphi_n(x)\}$, care tind către zero aproape peste tot, șirul $\int_a^b \varphi_n(x)dx$ tinde de asemenea către zero.

2° Fie un șir crescător $\{\varphi_n(x)\}$ de funcții în scară, cu proprietatea că $\sup_n \int_a^b \varphi_n(x)dx < \infty$. Atunci șirul $\{\varphi_n(x)\}$ tinde aproape peste tot către o limită finită.

Demonstrația lemei 1°. Reamintiți-vă proprietățile mulțimilor de măsură nulă. O reuniune numărabilă de astfel de mulțimi continuă să fie de măsură nulă. Deci, dacă notăm cu C mulțimea punctelor în care șirul $\varphi_n(x)$ nu tinde către zero și cu D_n mulțimea (finită) a punctelor în care $\varphi_n(x)$ nu este continuă, atunci $C \cup \bigcup_{n=1} D_n \cup \{a\} \cup \{b\} = E$ va fi de asemenea de măsură nulă.

Șirul $\varphi_n(x)$ fiind descrescător, din $\varphi_1(x) < M$ pe $[a, b]$ rezultă și $\varphi_n(x) < M$ pe $[a, b]$ pentru orice n. Fie apoi $\varepsilon > 0$

arbitrar. Putem acoperi pe E cu un sistem de intervale $\{I\}$ de lungime totală mai mică decît $\frac{\varepsilon}{2M}$. Pentru orice $x_0 \notin E$, $\varphi_n(x_0) \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci există un indice $n_0 = n_0(x_0, \varepsilon)$, astfel încît $\varphi_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Cum φ_{n_0} este continuă în x_0, această inegalitate este verificată într-o vecinătate I_{x_0} a lui x_0, pentru orice $n > n_0$, căci şirul $\{\varphi_n\}$ este descrescător.

Sistemul de intervale deschise $\{I, I_{x_0}$ cu $x_0 \notin E\}$ acoperă pe $[a, b]$ deci (Borel-Lebesgue) există un număr finit de intervale I şi de intervale $I_{x_1}, \ldots, I_{x_k}$ care acoperă pe $[a, b]$.

Fie $N = \max n_k(x_k)$. Atunci, pe $\bigcup_{i=1}^{k} I_{x_i}$, $\varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ pentru orice $n > N$ şi deci contribuţia lui φ_n la integrala $\int_a^b \varphi_n dx$ nu va depăşi

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Restul punctelor din $[a, b]$ va fi acoperit de intervale I, lungimea lor totală fiind cel mult $\frac{\varepsilon}{2M}$ şi, cum $\varphi_n(x) < M$, contribuţia la integrala $\int_a^b \varphi_n dx$ nu va depăşi $\frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2}$.

În definitiv, pentru orice $n > N$ (remarcaţi că N depinde numai de ε) avem

$$0 \leqslant \int_a^b \varphi_n(x) dx < \varepsilon, \text{ q.e.d.}$$

Demonstraţia lemei 2°. Să presupunem la început că $\varphi_n(x) \geqslant 0$ şi fie $\sup_n \int_a^b \varphi_n(x) dx = A$ (presupus finit în enunţul lemei). Fie D_0 mulţimea punctelor x din $[a, b]$ în care $\varphi_n(x)$ nu converge către o limită finită; trebuie arătat că D_0 este de măsură nulă. Fie E mulţimea acelor x cu

proprietatea că, de la un rang n, $\varphi_n(x) > \frac{A}{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ fiind un număr pozitiv arbitrar, dar fixat).

Dacă utilizăm notația $E_{\varepsilon,k} = \left\{x \mid \varphi_k(x) > \frac{A}{\varepsilon}\right\}$, evident că $E_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}$ și că $E_{\varepsilon,1} \subset E_{\varepsilon,2} \subset \ldots \subset E_{\varepsilon,n} \subset \ldots$ Dar cum $\int_a^b \varphi_k(x)\mathrm{d}x < A$, este evident că $E_{\varepsilon,k}$ (care este format — nu uitați că $\varphi_k(x)$ sînt funcții în scară — dintr-un număr finit de intervale) este de măsură ce nu poate depăși pe ε ($A > > \int_{E_{\varepsilon,k}} \varphi_k(x)\mathrm{d}x > \frac{A}{\varepsilon}$, suma lungimilor intervalelor lui $E_{k,\varepsilon}$) și de aici se conchide că E_ε este format dintr-un sistem (eventual infinit) de intervale, ale căror lungimi totale nu depășesc pe ε. Dar $D_0 \subset E_\varepsilon$, deci, ε fiind arbitrar, D_0 este de măsură nulă.

Cazul în care $\varphi_n(x)$ nu sînt toate nenegative se reduce la cazul precedent, considerînd șirul $\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_1(x)$ care este evident nenegativ, căci șirul $\{\varphi_n\}$ era presupus crescător, q.e.d.

Lemele 1° și 2° se extind, fără modificări, în cazul în care intervalul (a, b) nu mai este în mod necesar compact, cu condiția de a presupune (aceasta de fapt intervine doar în lema 1°) că, prin definiție, o funcție în scară este identic nulă în afara unui interval compact.

Înarmați cu aceste rezultate *vom lărgi* clasa funcțiilor pentru care este definită integrala, în modul următor: notăm cu C_0 clasa funcțiilor în scară, definite pe $[a, b]$; considerăm clasa C_1 a acelor funcții ce se pot obține ca limită *aproape peste tot* de șiruri crescătoare $\{\varphi_n\}$ de funcții în scară, astfel încît $\sup_n \int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x < \infty$ (aici intervine lema 2°).

Șirul (de numere) $\left\{\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right\}$, fiind crescător și mărginit, are o limită.

Dacă $f \in C_1$, deci dacă $f(x)$ este limita aproape peste tot a unui şir, ca mai sus, este firesc să definim $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$.

Pentru ca această definiţie a integralei să fie corectă este nevoie ca:

(1) în cazul în care $f \in C_0$, ea să coincidă cu cea dată mai înainte şi

(2) să nu depindă de şirul $\varphi_n(x)$ ales. Cu alte cuvinte, dacă $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ şi $f(x) = \lim \psi_n(x)$ aproape peste tot, trebuie arătat că $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n(x)dx$. Este clar că (2) implică (1).

Demonstraţia apelează la lema 1°. Fixăm o funcţie φ_m. Atunci şirul $\varphi_m(x) - \psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, descreşte (căci ψ_n este crescător) şi tinde, aproape peste tot, către $\varphi_m(x) - f(x) \leqslant 0$. Dacă considerăm şirul $\{[\varphi_m(x) - \psi_n(x)]^+\}$, unde $[\varphi_m(x) - \psi_n(x)]^+$ este egal cu $\varphi_m(x) - \psi_n(x)$ dacă $\varphi_m(x) - \psi_n(x) > 0$ şi egal cu zero în cazul contrar, acest şir va descreşte şi va tinde către zero (aproape peste tot).

Aplicăm lema 1°: $\int_a^b [\varphi_m(x) - \psi_n(x)]^+ dx \to 0$ $(n \to \infty)$. Dar cum $\varphi_m(x) - \psi_n(x) < [\varphi_m(x) - \psi_n(x)]^+$, vom avea $\int_a^b (\varphi_m(x) - \psi_n(x))dx < \int_a^b [\varphi_m(x) - \psi_n(x)]^+ dx$, deci $\int_a^b (\varphi_m(x) - \psi_n(x))dx$ tinde către o limită cel mult egală cu zero, adică $\int_a^b \varphi_m(x)dx \leqslant \lim \int_a \psi_n(x)dx$. Făcînd pe $m \to \infty$, obţinem $\lim_{m\to\infty} \int_a^b \varphi_m(x)dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx$. Schimbînd rolurile lui φ_m şi ψ_n obţinem inegalitatea contrarie, de unde rezultă egalitatea celor două limite. Cu exact acelaşi raţionament se arată că dacă $f_1, f_2 \in C_1$ şi $f_1 \leqslant f_2$, atunci $\int f_1 dx \leqslant \int f_2 dx$.

Se verifică uşor, şi lăsăm aceasta în sarcina cititorului, că dacă $f, g \in C_1$, atunci $f + g$, sup (f, g), inf (f, g) aparţin de asemenea lui C_1 şi că $cf \in C_1$ dacă c este o constantă pozitivă.

În plus, $\int_a^b cf\mathrm{d}x = c\int_a^b f\mathrm{d}x$ $(c > 0)$, $\int_a^b (f+g)\mathrm{d}x =$
$= \int_a^b f\mathrm{d}x + \int_a^b g\mathrm{d}x$ și $\int_a^b f\mathrm{d}x = \int_a^c f\mathrm{d}x + \int_c^b f\mathrm{d}x$.

În continuare să definim integrala pentru funcțiile unei clase și mai largi, notată cu C_2. Această clasă va fi, prin definiție, mulțimea funcțiilor f de forma $f = f_1 - f_2$, cu $f_1, f_2 \in C_1$. Integrala lui f se va defini desigur astfel

$$\int_a^b f_1\mathrm{d}x - \int_a^b f_2\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x$$

Rezultă imediat că definiția aceasta este corectă (i.e. dacă $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, atunci $\int_a^b f_1\mathrm{d}x - \int_a^b f_2\mathrm{d}x = \int_a^b g_1\mathrm{d}x -$ $- \int_a^b g_2\mathrm{d}x)$: $\int_a^b f_1\mathrm{d}x - \int_a^b f_2\mathrm{d}x = \int_a^b g_1\mathrm{d}x - \int_a^b g_2\mathrm{d}x$ este echivalentă cu $\int_a^b f_1\mathrm{d}x + \int_a^b g_2\mathrm{d}x = \int_a^b f_2\mathrm{d}x + \int_a^b g_1\mathrm{d}x$, dacă $f_1 + g_2 =$ $= f_2 + g_1$ și știm că, pentru $f, g \in C_1$, $\int_a^b (f+g)\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x +$ $+ \int_a^b g\mathrm{d}x$, de unde concluzia căutată.

De asemenea se verifică ușor că $\int (\lambda f + \beta g)\mathrm{d}x = \lambda \int f\mathrm{d}x +$ $+ \beta \int g\mathrm{d}x$, pentru orice $f, g \in C_2$ și λ, β constante. Cu alte cuvinte, aplicația $f \to \int_a^b f\mathrm{d}x$ definită pe C_2 cu valori în R^1 este o aplicație liniară, ba mai mult, este o funcțională liniară pozitivă, sau, altfel spus, $f \geqslant 0$ implică (presupunem că $f \in C_2$) $\int f\mathrm{d}x \geqslant 0$. Funcțiile din C_2 le vom numi *integrabile*, sau *sumabile* (termen introdus de Lebesgue). Dacă h este integrabilă, atunci $h = f_1 - f_2$, cu $f_1, f_2 \in C_1$. Din formulele următoare (a căror demonstrație constituie un exercițiu simplu pe care e bine să-l încercați):

$$|h| = \sup(f_1, f_2) - \inf(f_1, f_2)$$
$$h^+ = \sup(f_1, f_2) - f_2 = f_1 - \inf(f_1, f_2)$$
$$|h| = h^+ + h^-$$

rezultă imediat că h^+, h^-, $|h|$ sînt integrabile, dacă h este integrabilă.

Să mai considerăm alte două proprietăţi:

1° Dacă h este integrabilă, atunci $\left|\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |h(x)|\,\mathrm{d}x$ (căci $\pm h(x) \leqslant |h(x)|$, deci $\pm \int_a^b h\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |h|\,\mathrm{d}x$).

2° Pentru orice h integrabilă, există un şir de funcţii în scară φ_n, astfel încît $\varphi_n(x) \to h(x)$ aproape peste tot şi

$$\int_a^b |h(x) - \varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(este suficient să se observe că diferenţa a două funcţii în scară este o funcţie în scară şi să se ţină seama de definiţia clasei C_2).

Este natural să ne punem întrebarea: ce se întîmplă dacă încercăm să lărgim clasa C_2 în modul în care, plecînd de la C_0, am obţinut clasa C_1?

Un fapt cu totul remarcabil este că prin acest procedeu nu ieşim din clasa C_2. Acest rezultat este exprimat de următoarea teoremă (care spune de fapt ceva mai mult).

Teorema lui Beppo Levi. Orice şir crescător de funcţii integrabile $\{h_n(x)\}$ pe (a,b) * („integrabil" înseamnă, de acum încolo, „aparţine lui C_2") cu proprietatea că $\sup_n \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x < \infty$, converge aproape peste tot către o funcţie integrabilă $h(x)$. Mai mult, $\int h(x)\mathrm{d}x = \lim \int h_n(x)\mathrm{d}x$.

Evident că acest enunţ este echivalent cu următorul: orice serie $\sum u_n(x)$ de funcţii integrabile nenegative, pentru care seria integralelor $\sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, converge aproape peste tot către o funcţie integrabilă şi integrarea poate fi făcută termen cu termen. Demonstraţia se face în două etape.

Să presupunem mai întîi că termenii $u_n \in C_1$. Atunci pentru fiecare $u_n(x)$ există un şir crescător de funcţii în scară $\varphi_{n,k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, care converge aproape peste tot

* Nu se cere ca (a, b) să fie mărginit.

către $u_n(x)$ şi putem presupune că $\varphi_{n,k} \geqslant 0$, căci $u_n(x)$ sînt nenegative, iar şirul $\{\varphi_{n,k}\}$ este crescător.

Fie $\Phi_k = \sum_{n=1}^{k} \varphi_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Funcţia Φ_k este o funcţie în scară, $\Phi_k \leqslant \Phi_{k+1}$. În plus, aproape peste tot $\Phi_k(x) \leqslant \sum_{n=1}^{k} u_n(x) = U_k(x)$, căci $\varphi_{n,k}(x) \leqslant u_n(x)$. Rezultă de aici că $\int \Phi_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int U_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M$ (unde $M = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x)\mathrm{d}x$ şi este finit prin ipoteză). Ne aflăm în condiţiile lemei 2°, care poate fi deci aplicată şirului $\{\Phi_k\}$ şi vom găsi că $\Phi_k(x)$ converge aproape peste tot către o funcţie integrabilă $U(x)$ şi că $\int \Phi_k(x)\mathrm{d}x \to \int U(x)\mathrm{d}x$, cînd $k \to \infty$. Vom arăta acum că U_k tinde aproape peste tot către $U(x)$ şi că $\int U_k(x)\mathrm{d}x \to \int U(x)\mathrm{d}x$, ceea ce demonstrează teorema în cazul considerat.

Într-adevăr, este suficient să remarcăm că, pentru $m > k$

$$\Phi_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \varphi_{n,m}(x) \geqslant \sum_{n=1}^{k} \varphi_{n,m}(x).$$

Fixînd pe k şi făcînd pe m să tindă către infinit, se găseşte că $U(x) \geqslant \sum_{n=1}^{k} u_n(x) = U_k(x)$, aproape peste tot.

Dar $\Phi_k(x) \leqslant U_k(x)$, deci $\Phi_k(x) \leqslant U_k(x) \leqslant U(x)$ aproape peste tot, prin urmare

$$\int \Phi_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int U_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int U(x)\mathrm{d}x.$$

Facem acum pe $k \to \infty$ şi ţinînd seama că $\int \Phi_k(x)\mathrm{d}x \to \int U(x)\mathrm{d}x$, obţinem rezultatul căutat, în cazul în care termenii seriei $\sum u_n$ aparţin lui C_1.

Cazul general se bazează pe următoarea observaţie: orice funcţie nenegativă $f(x)$ aparţinînd lui C_2 se poate reprezenta ca diferenţa a două funcţii nenegative din C_1, $f = f_1 - f_2$, cu proprietatea că, luînd un $\varepsilon > 0$ arbitrar, $\int f_2(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

Într-adevăr, $f \in C_2$ implică $f = f_1' - f_2'$ cu $f_i' \in C_1$ $(i = 1,2)$. Există deci un şir crescător de funcţii în scară $\{\varphi_n\}$ ce converge aproape peste tot către f_2', iar $\int \varphi_n(x)\mathrm{d}x \to \int f(x)\mathrm{d}x$ (aşa se defineşte $\int f(x)\mathrm{d}x$!). Deci numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, există un indice $N(\varepsilon)$, astfel încît $\int (f_2'(x) - \varphi_n(x))\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Este suficient să luăm atunci $f_1 = f_1' - \varphi_{N(\varepsilon)}$, iar $f_2 = f_2' - \varphi_{N(\varepsilon)}$ şi avem descompunerea căutată.

Fie acum $u_n(x) \in C_2$ $(n = 1,2,\ldots)$. Aplicînd observaţia de mai sus, vom putea scrie $u_n(x) = v_n(x) - w_n(x)$ cu $\int w_n(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{2^n}$ $\left(\text{am luat } \varepsilon = \frac{1}{2^n}\right)$ şi $v_n, w_n \in C_1$.

Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} \int w_n(x)\mathrm{d}x$ converge; dar cum şi $\sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x)\mathrm{d}x$ converge, rezultă că şi $\sum_{n=1}^{\infty} \int v_n(x)\mathrm{d}x$ converge (este vorba doar de serii numerice), deci am redus totul la cazul anterior şi aplicăm cele demonstrate la început atît seriei $\sum u_n$, cît şi seriei $\sum w_n$ şi cu aceasta demonstraţia este terminată.

Oricît de interesant ar fi rezultatul lui B. Levi, el ia în consideraţie doar şiruri monotone de funcţii integrabile. Să vedem ce se poate spune, în general, despre şiruri care converg aproape peste tot. Este uşor să construim şiruri de funcţii continue, care să tindă către zero cu excepţia unui singur punct, în care limita să fie infinită şi astfel încît şirul integralelor respective să nu tindă către zero, sau chiar să tindă către infinit. Cu alte cuvinte, fără a cere o condiţie suplimentară, nu putem spera să integrăm termen cu termen un şir general. Un răspuns la această problemă este



Henri Lebesgue
(1875—1941)

dat de *teorema lui Lebesgue*: fie $f_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ un şir de funcţii integrabile pe (a, b) *, care converge aproape peste tot către o funcţie $f(x)$; în plus se presupune că există o funcţie $g(x)$ integrabilă, astfel încît, pentru orice n, $|f_n(x)| < g(x)$. Concluzie: $f(x)$ este integrabilă şi $\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$.

În particular, dacă intervalul (a, b) este mărginit şi dacă $g(x)$ este o constantă astfel încît $|f_n(x)| < C$ $(n = 1,2,...)$, atunci funcţia limită $f(x)$ este integrabilă şi

---

* Interval despre care, ca şi în teorema lui B. Levi, nu se face nici o ipoteză de mărginire.

integrala sa este limita integralelor funcţiilor f_n *. Demonstraţia va face apel la teorema lui B. Levi.

Dacă Φ_n este un şir oarecare de funcţii integrabile majorate în modul de o funcţie integrabilă ψ (pentru $n = 1,2,...$), atunci funcţiile $\sup\limits_{n \leq k} \Phi_k$, vor fi integrabile, vor forma un şir crescător, deci (graţie teoremei lui B. Levi) funcţia limită, care este $\sup\limits_{n} \Phi_n$, va fi de asemenea integrabilă. Aplicînd aceste consideraţii şirului nostru f_n, tragem concluzia că şi funcţiile $g_n = \sup\limits_{k \geq n} f_k$ sînt integrabile. Evident că şirul g_n este descrescător şi că $g_n(x) > - g(x)$, deci $\int g_n(x)\mathrm{d}x > -\int g(x)\mathrm{d}x$.

Vom arăta imediat că $g_n(x)$ tinde aproape peste tot către $f(x)$. Să presupunem că am demonstrat aceasta. Teorema lui B. Levi ne spune iarăşi că $f(x)$ este integrabilă şi că $\int g_n(x)\mathrm{d}x \to \int f(x)\mathrm{d}x$, cînd $n \to \infty$ (în enunţul iniţial al teoremei lui Levi se cerea ca şirul considerat să fie crescător şi integralele respective să fie mărginite superior, uniform în raport cu n; în cazul şirurilor descrescătoare este suficient să înmulţim cu -1 pentru a reduce situaţia la enunţul cunoscut şi ca atare trebuie ca integralele considerate să fie minorate uniform în raport cu n). Rămîne de arătat că $g_n(x)$ tinde (aproape peste tot) către $f(x)$.

* Dacă în enunţul teoremei lui Lebesgue am înlocui integrabilitatea în sensul lui Lebesgue cu integrabilitatea Riemann, concluzia n-ar mai fi adevărată. Un exemplu simplu ni-l oferă, pe intervalul $[0,1]$, şirul $f_n(x) \equiv 1$, care tinde aproape peste tot către funcţia $\varphi(x) = 0$ în punctele raţionale şi $\varphi(x) = 1$ în punctele iraţionale. Toate condiţiile sînt îndeplinite, dar $\varphi(x)$ nu este integrabilă Riemann. Dacă se face ipoteza suplimentară că funcţia limită este integrabilă Riemann, concluziile teoremei lui Lebesgue se păstrează şi pentru integrabilitatea Riemann (ele se deduc banal din enunţul general şi din faptul că, pentru funcţii integrabile Riemann, integralele Riemann şi Lebesgue coincid). Sub această formă teorema este cunoscută sub numele de teorema lui Arzela-Osgood.

Dar raţionînd perfect analog, rezultă că şi $h_n = \inf_{k \geqslant n} f_k$ $(n=1,2,\ldots)$ sînt integrabile; să presupunem ştiut că $h_n(x) \to$ $\to f(x)$ aproape peste tot. Atunci $\int h_n(x)\mathrm{d}x \to \int f(x)\mathrm{d}x$ (din nou am aplicat teorema lui B. Levi).

Cum

$$h_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x),$$

avem

$$\int h_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int g_n(x)\mathrm{d}x.$$

Dar membrii extremi ai inegalităţii tind, după cum am văzut, către $\int f(x)\mathrm{d}x$, deci şi $\int f_n(x)\mathrm{d}x \to \int f(x)\mathrm{d}x$.

Rămîne de arătat convergenţa lui g_n (respectiv h_n) către $f(x)$. Aceasta rezultă din remarca următoare:

Dacă $\{a_n\}$ (un şir de numere reale) tinde către α, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi n suficient de mare, $a - \varepsilon < a_n <$ $< a + \varepsilon$, deci

$$a - \varepsilon \leqslant \inf_{k \geqslant n} a_k \leqslant \sup_{k \geqslant n} a_k \leqslant a + \varepsilon,$$

prin urmare şirurile $\inf\limits_{k \geqslant n} a_k = \alpha_n$ şi $\sup\limits_{k \geqslant n} a_k = \beta_n$ tind şi ele către α. În cazul nostru, şirul a_k va fi şirul $f_n(x)$, x fiind un punct în care şirul f_n converge.

Teorema lui Lebesgue este astfel complet demonstrată.

Se pot demonstra şi alte teoreme privind şirurile de funcţii integrabile ce converg aproape peste tot. Un rezultat deosebit de util este aşa-numita *lemă a lui Fatou*: fie $\{f_n(x)\}$ un şir de funcţii nenegative, integrabile, convergînd aproape peste tot către $f(x)$; dacă $\int f_n(x)\mathrm{d}x < M$ (M independent de n), atunci funcţia limită $f(x)$ este integrabilă şi

$$\int f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\lim} \int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

În comparaţie cu teorema lui Lebesgue, lema lui Fatou cere doar mărginirea inferioară a şirului $f_n(x)$ de către o

funcţie sumabilă (este vorba de funcţia identic zero), deci mai puţin. Concluzia este însă şi ea mai slabă; ni se oferă doar o evaluare a integralei funcţiei limită, nu ştim însă dacă putem integra termen cu termen. Demonstraţia lemei lui Fatou nu este în fapt decît repetarea celei de-a doua părţi a demonstraţiei teoremei lui Lebesgue, şi deci o omitem.

Este ușor de văzut că dacă $f(x)$ este integrabilă Riemann, atunci integrala sa în sensul lui Lebesgue există şi este egală cu integrala în sensul lui Riemann. Într-adevăr, ştim că $f(x)$ este continuă, cu excepția unei mulţimi de măsură nulă și în punctele sale de continuitate ea este aproximată de funcţiile în scară φ_n obținute în modul următor: considerăm o diviziune (d) $a = x_1 < x_2, \ldots, < x_n = b$, de normă $\nu(d) < \frac{1}{n}$. Funcţia $\varphi_n(x)$ este definită egală cu m_k pe intervalul (x_k, x_{k+1}), m_k fiind marginea inferioară a lui $f(x)$ pe (x_k, x_{k+1}). Integrala lui φ_n va fi tocmai suma $\sum m_k \Delta_k$ a funcţiei $f(x)$, corespunzătoare diviziunii (d). Şirul φ_n este crescător, tinde aproape peste tot către $f(x)$, deci $\lim \int \varphi_n(x) dx$ va fi, prin definiție, $\int f(x) dx$ (integrala în sensul lui Lebesgue). Dar cum sumele $\sum m_k \Delta_k$ tind către $\int f(x) dx$ (integrala în sensul lui Riemann), dacă $f(x)$ este integrabilă, atunci, în acest caz, cele două integrale coincid.

Cum se poate defini integrala Lebesgue a unei funcții care depinde de mai multe variabile? Construcția făcută mai înainte se repetă întocmai, dacă putem defini în R^n mulţimile de măsură nulă și funcțiile în scară, ceea ce este foarte uşor. Pentru a fixa ideile vom face consideraţiile noastre în cazul planului. Vom spune că o mulțime $M \subset R^2$ este de măsură (bidimensională) nulă, dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, M poate fi acoperită cu dreptunghiuri ale căror laturi să fie paralele axelor de coordonate și a căror arie totală să nu depăşească numărul ε. O funcţie în scară (sau o funcţie simplă, sau o funcţie „etajată"), nu va fi decît o funcţie ce ia valori constante pe un număr finit de astfel

de dreptunghiuri şi nulă în afara lor. În spaţiul R^n locul dreptunghiurilor va fi luat de produse carteziene de intervale, pe care, pe drept cuvînt, le putem numi „cuburi“ n-dimensionale, în locul ariei considerîndu-se „volumul“ acestor cuburi. Deşi construcţia este perfect similară celei din R^1, apar probleme noi. Dintre acestea, în cele ce urmează (Cap. VI şi VII), ne va interesa următoarea chestiune.

Fie $f(x,y)$ o funcţie integrabilă, cu $x \in R^p$, $y \in R^m$. Pentru ce valori ale lui y, funcţia $x \to f(x,y)$ este integrabilă şi care este relaţia dintre $\int f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ şi integrala iterată $\int\left(\int f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$? Răspunsul este dat de teorema lui Fubini (pe care o vom admite fără demonstraţie). Dacă $f(x, y)$ este integrabilă pe $I \times J$ (unde I este un „cub“ în R^p, iar J un „cub“ în R^m), atunci, pentru aproape orice $y \in J$, funcţia $x \to f(x, y)$ este integrabilă pe I şi $\int_{I\times J} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\left(\int f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$ (Evident, enunţul este analog schimbînd rolul variabilelor). Vom utiliza acest rezultat în capitolul VI.

Despre noţiunea de măsură

Aţi văzut că la baza construcţiei integralei Lebesgue figura noţiunea de mulţime de măsură nulă şi că ceea ce interesa erau proprietăţile „aproape peste tot“, adică în toate punctele, cu excepţia unora care să formeze o mulţime de măsură nulă. În acest paragraf vom discuta cîteva chestiuni legate de noţiunea de măsură, fără a da, în general, demonstraţii.

Fie χ_E funcţia caracteristică a unei mulţimi (i. e. $\chi_E(x) = 1$ dacă $x \in E$ şi $\chi_E(x) = 0$ dacă $x \in E$). Să presupunem că χ_E este limita aproape peste tot, de funcţii în scară. Vom

spune atunci că χ_E este măsurabilă (mai general, orice funcție limită aproape peste tot de funcții în scară o vom numi funcție măsurabilă) și că mulțimea E este măsurabilă dacă χ_E este măsurabilă.

Dacă E este măsurabilă, masura sa $m(E)$ se va defini ca egală cu $\int\chi_E(x)dx$, în cazul în care χ_E este integrabilă, și egală cu $+\infty$ în cazul contrar. Ce proprietăți are această măsură? În primul rînd, vedem imediat că în cazul unui interval (a, b), $m[(a, b)]$ nu este decît lungimea $b - a$ a intervalului considerat. Apoi, se verifică ușor că orice mulțime deschisă este măsurabilă și că, dacă E și F sînt măsurabile și $E \cap F = \emptyset$, atunci $m(E) + m(F) = m(E \cup F)$. Dar utilizînd teorema lui B. Levi putem obține mai mult: dacă $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ este o familie numărabilă de mulțimi măsurabile, două cîte două disjuncte, atunci $m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$ (proprietatea de completă aditivitate).

În definitiv, măsura m definită mai sus este o funcție cu valori nenegative (putînd lua și valoarea $+\infty$) definită pe o familie $\mathfrak{M}$ de submulțimi ale dreptei reale (mulțimile „măsurabile“), familia $\mathfrak{M}$ verificînd următoarele proprietăți:

1° conține mulțimile deschise;

2° dacă $A, B \in \mathfrak{M}$, atunci $A \cup B$ și $A - B \in \mathfrak{M}$ $(A - B = A \cap CB)$;

3° dacă $A_n \in \mathfrak{M}$, $n = 1,2, \dots$, atunci $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$;

4° dacă $A \in \mathfrak{M}$, atunci mulțimea translatată $x + A_n \in \mathfrak{M}$ și $m(A + x) = m(A)$.

Măsura pe care am definit-o și care se numește măsura Lebesgue (prin intermediul integralei Lebesgue) este deci o funcție care, într-un anume sens, măsoară „întinderea“ mulțimilor (deși, de pildă, există mulțimi nenumărabile de măsură nulă). Lebesgue a definit mai întîi măsura și apoi, cu ajutorul acesteia, a constituit integrala sa.

Definiţia dată de Lebesgue urma unor tentative mai vechi făcute de C. Jordan, O. Stolz, A. Harnack şi G. Cantor; definiţiile măsurii unei mulţimi, date de aceştia, sufereau de grave neajunsuri. E. Borel a fost acela care a indicat calea de urmat şi a arătat, foarte pe scurt, cum se poate extinde definiţia măsurii (definită iniţial doar pentru mulţimile deschise) la toate mulţimile ce se obţin plecînd de la mulţimile deschise, prin iterarea indefinită a operaţiilor de „diferenţă" $A - B = A \cap CB$ şi reuniune numărabilă (mulţimile obţinute, astfel se numesc mulţimi boreliene). Lebesgue a dezvoltat sistematic teoria măsurii. Iată definiţiile precise. Dacă G este o mulţime deschisă, atunci ea este o reuniune numărabilă de componente, fiecare componentă fiind un interval deschis; măsura lui G se va defini ca suma lungimilor acestor componente. Apoi, fie E o mulţime mărginită. Atunci măsura sa exterioară $m^*(E)$ (respectiv măsura sa interioară $m_*(E)$) se defineşte ca $m^*(E) = \inf m(G)$, G deschisă, $E \subset G$ (respectiv $m_*(E) = \sup m(F)$, F închis, $F \subset E$, măsura unei mulţimi închise definindu-se desigur ca $(b-a)-m(CF)$, unde $b - a$ este lungimea unui interval (a, b) ce cuprinde pe E, iar CF este complementara lui F faţă de (a, b), mulţime ce rezultă deschisă).

Lebesgue spunea că E este măsurabilă dacă $m^*(E) = m_*(E)$ şi valoarea aceasta comună este măsura lui E, notată $m(E)$. Se poate arăta că $m(E)$ coincide cu $\int \chi_E dx$, şi că cele două definiţii ale măsurabilităţii coincid. Nu vom arăta aceasta deoarece este vorba de o chestiune cu caracter pur tehnic. Noţiunea de funcţie măsurabilă devine: f este măsurabilă dacă mulţimile $\{x \mid f(x) < c\}$ sînt măsurabile pentru orice număr real c. Clasa $\mathfrak{M}$ a mulţimilor măsurabile cuprinde, în particular, clasa mulţimilor boreliene, dar este mai largă decît aceasta.

Cîţiva ani după apariţia integralei lui Lebesgue, matematicianul I. Radon a remarcat că toate construcţiile lui Lebesgue se puteau reface, dacă se pleca de la o funcţie de mulţime, cu valori reale (deci nu neapărat pozitive) definită pe familia mulţimilor măsurabile Lebesgue, iar ceva mai

tîrziu, M. Fréchet observă că considerațiile lui Radon rămîn valabile, dacă se pleacă de la o funcție complet aditivă definită pe o familie de părți $\mathfrak{R}$ ale unei mulțimi oarecare X, familie ce verifică doar condițiile 1°, 2°, 3°.

Cu alte cuvinte, o măsură μ va fi o funcție definită pe o familie $\mathfrak{R}$ de părți ale unei mulțimi arbitrare X, cu valori reale (putînd lua și valoarea $+\infty$ sau $-\infty$, cu restricția că, dacă $+\infty$ aparține valorilor luate de μ, atunci $-\infty$ este exclus și reciproc) care posedă proprietatea de completă aditivitate (i. e. dacă $A_n \in \mathfrak{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, atunci $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$. Măsura μ se spune că este pozitivă dacă ia doar valori nenegative. Esențial este faptul că, dîndu-se o măsură oarecare, punctele pot foarte bine să nu mai fie de măsură nulă (un exemplu simplu este oferit de măsura lui Dirac δ în punctul x: $\delta(E) = 1$ dacă $x \in E$ și $\delta(E) = 0$ dacă $x \notin E$) și în general se pierde invarianța la translații. În ceea ce privește mulțimile de măsură nulă în raport cu două măsuri μ_1 și μ_2, ele pot fi complet diferite. Dacă $\mu_1(E) = 0$ implică $\mu_2(E) = 0$ pentru orice E măsurabilă, atunci se spune că μ_2 este absolut continuă în raport cu μ_1.

Cum se construiește integrala în raport cu o măsură oarecare? Locul funcțiilor în scară este luat de funcțiile „simple"*: f este simplă dacă $f(x) = \sum_i \lambda_i \chi_{E_i}(x)$, cu E_i măsurabile și χ_{E_i} funcția caracteristică a mulțimii E_i. În acest caz $\int f(x) d\mu$ se definește ca $\sum_i \lambda_i \mu(E_i)$. O funcție f este integrabilă, dacă există un șir f_n de funcții în scară, cu proprietatea $\int |f_n - f_m| \, d\mu \to 0$, cînd $n, m \to \infty$ și astfel ca f_n să tindă în măsură către f (aceasta înseamnă că $\mu(\{x \mid |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}) \to 0$ cînd $n \to \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$).

Sînt numeroase motivele care fac importantă noțiunea generală de măsură. În particular, ea este esențială în teoria probabilităților.

---

* Sau „etajate".

În cazul în care mulțimea de bază X este un spațiu topologic local compact, teoria se poate dezvolta paralel, pornind de la o funcțională liniară continuă $\mu(f)$ pe $C(K)$ * (pentru simplificare am presupus $X = K$, compact). Această funcțională se prelungește apoi (prin intermediul funcțiilor semicontinue) la o clasă mult mai largă de funcții, funcțiile integrabile, măsura unei mulțimi definindu-se ca integrala funcției sale caracteristice.

Să ne reîntoarcem la măsura m, numită măsura Lebesgue. Se poate arăta că orice altă măsură μ, invariantă la translații, este un multiplu (cu un factor constant), al măsurii Lebesgue. Există mulțimi care să nu fie măsurabile Lebesgue?

Putem da un răspuns afirmativ, oferind un exemplu simplu, care însă apelează în mod esențial la axioma alegerii (acest exemplu se datorește matematicianului italian Vitali). Vom proceda astfel: în mulțimea numerelor reale introducem relația de echivalentă $x \sim y$, dacă și numai dacă $x - y$ este un număr rațional. Această relație determină împărțirea mulțimii numerelor reale în clase de echivalență.

Fie acum E o submulțime a intervalului $(0,1)$, construită alegînd, din fiecare clasă de echivalență, exact un singur element (care să aparțină lui $(0,1)$), ceea ce este posibil datorită axiomei lui Zermelo!

Fie $E + r$ mulțimea $\{x + r, x \in E\}$. Atunci, pentru orice $x \in (0,1)$, există un număr rațional $r \in (-1, +1)$, astfel încît $x \in E + r$. Într-adevăr, $x \in (0,1)$ implică existența unui $y \in E$ (unic determinat), astfel ca $x \sim y$, deci $x - y = r$ (cu r rațional), deci $x = y + r \in E + r$. Apoi, dacă r și s, $r \neq s$, sînt două numere raționale, atunci $(E + r) \cap (E + s) = \emptyset$, căci altfel ar exista în E două puncte echivalente, ceea ce nu este posibil. Să presupunem acum că E este măsurabilă: atunci $m(E) = m(E + r) = \alpha > 0$. Fie $S = \bigcup_{r \in (-1,+1)} (E + r)$. Mulțimile $E + r$ (cînd

* Din acest motiv funcționalele liniare și continue pe $C(K)$ se numesc măsuri Radon.

r variază) fiind disjuncte, $m(S)=\sum_{r\in(-1,+1)} m(E+r)$. Cum $S\subset(-1,2)$, $m(S)\leqslant 3$. Dacă $m(E)$ ar fi pozitivă, ar rezulta o absurditate, căci în membrul din stînga al egalității $m(S)=\sum m(E+r)$ am avea un număr cel mult egal cu 3 și în dreapta am avea infinit. Prin urmare $m(E)=0$, deci și $m(S)=0$. Dar, pe baza primei noastre observații, $(0,1)\subset S$, de unde contradicția $m(S)\geqslant 1$, deci E nu este măsurabilă.

Integrala Stieltjes și forma funcționalelor liniare pe C([a, b])

O generalizare foarte naturală a integralei Riemann a fost dată în 1894 de matematicianul olandez T. Stieltjes, care a avut nevoie de această generalizare în anumite probleme cu fracții continue. Importanța noțiunii introduse de Stieltjes a trecut neobservată cîțiva ani, pînă cînd F. Riesz a descoperit, în 1909, o legătură surprinzătoare între integralele Stieltjes și funcționalele liniare și continue, definite pe spațiul funcțiilor continue, pe un interval $[a, b]$, spațiu notat $C([a, b])$ sau $C(I)$ (dacă $[a, b]=I$) și înzestrat cu topologia dată de norma $f\to\|f\|=\sup_{x\in I}|f(x)|$.

Care este definiția integralei Stieltjes? În locul sumelor Riemann $\sum f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$, se consideră suma de forma $\sum f(\xi_k)[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)]$, unde α este o funcție monotonă pe $[a, b]$. În cazul în care $\alpha(x)=x$, regăsim sumele Riemann. Integrala Stieltjes a funcției $f(x)$ în raport cu $\alpha(x)$, notată $\int f(x)d\alpha(x)$, va fi limita (dacă ea există) a acestor sume, exact ca în cazul integralei Riemann. Mai precis, numărul I va fi integrala funcției f în raport cu funcția α, dacă, pentru orice $\varepsilon>0$, există un număr $\eta(\varepsilon)>0$ astfel

încît, pentru orice diviziune (d) cu $\nu(d) < \eta(\varepsilon)$ şi orice alegere a punctelor ξ_k în intervalele $[x_k, x_{k+1}]$ ale diviziunii (d), să avem $| I - \sum f(\xi_n)[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)] | < \varepsilon$. Sau, dacă vreţi, putem considera sume superioare şi inferioare $S_d = \sum M_i [\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$, respectiv $s_d = \sum m_i[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$, putem lua marginea inferioară a sumelor superioare, apoi marginea superioară a sumelor inferioare, pe care le vom numi integrala Stieltjes superioară, respectiv inferioară şi vom defini integrala Stieltjes ca valoarea comună a acestor două margini, atunci cînd ele coincid. Teoria merge perfect paralel cu cea amintită în legătură cu integrala Riemann.

Definiţia se poate generaliza, cerînd ca funcţia $\alpha(x)$ să fie nu neapărat monotonă, ci cu variaţie mărginită şi deci, conform teoremei lui Jordan, diferenţa a două funcţii monotone.

Fie α cu variaţie mărginită; α se va scrie sub forma $\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$, cu α_1 şi α_2 monotone şi atunci $\int_a^b f(x)d\alpha$ se va defini ca diferenţa $\int_a^b f(x)d\alpha_1(x) - \int_a^b f(x)d\alpha_2(x)$.

Dacă α este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, orice funcţie continuă $f(x)$ pe $[a, b]$ este integrabilă în raport cu α. Evident, acest caz se reduce imediat la cazul $\alpha(x)$ monotonă şi, pentru a fixa ideile, să dăm demonstraţia presupunînd că α este crescătoare.

Într-adevăr, este suficient să arătăm că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, pentru orice diviziune (d) cu $\nu(d) < \eta(\varepsilon)$, avem $| S_d - s_d | < \varepsilon$, unde am notat cu S_d suma $\sum_{k=0}^{n} M_k(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$ şi cu s_d suma $\sum_{k=0}^{n} m_k(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$, numerele M_k şi m_k avînd aceeaşi semnificaţie ca în paragraful precedent.

Intervalul $[a, b]$ fiind mărginit, f va fi uniform continuă, deci, $\varepsilon > 0$ fiind dat, există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $|x - x'| < \delta$ să implice $| f(x) - f(x') | < \varepsilon$. Atunci, dacă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$,

$0 < S_d - s_d = \sum (M_k - m_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) < \varepsilon \sum (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) \leqslant \varepsilon(\alpha(b) - \alpha(a))$, de unde rezultă concluzia căutată.

Să presupunem că funcţia $\alpha(x)$ este o funcţie de tipul următor:

$$\alpha(x) \begin{cases} = 0 \text{ pentru } x \in [a, c], \\ = 1 \text{ pentru } x \in [c, b]. \end{cases}$$

Cine va fi $\int_a^b 1 \cdot d\alpha(x) = \int_a^b d\alpha(x)$? Vom avea desigur $\int_a^b d\alpha(x) = 1.$

Mai general, dacă α este o funcţie în scară, atunci $\int_a^b d\alpha(x)$ va fi egală cu suma salturilor funcţiei $\alpha(x)$, după cum se vede din definiţie. Reîntorcîndu-ne la cazul $\alpha(x) = 0$ pentru $x < c$, şi $\alpha(x) = 1$ pentru $x \geqslant c$, cu cît va fi egală $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, funcţia $f(x)$ fiind presupusă continuă? Se verifică imediat că $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(x)\,[\alpha(c+0) - \alpha(c-0)) = f(c)$.

Funcţia $\alpha(x)$ de mai sus ne permite să construim imediat un exemplu care ilustrează ce se poate întîmpla dacă se renunţă la continuitatea lui $f(x)$. Anume, să presupunem că $f(x)$ este nulă pentru $x < c$, şi egală cu 1 pentru $x \geqslant c$. În acest caz integrala $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ nu există! Într-adevăr, sumele $\sum M_k\,(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$ şi $\sum m_k\,(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$ se reduc la un singur termen, care corespunde intervalului (x_k, x_{k+1}) ce cuprinde punctul c, şi în acest caz $S_d = 1$ şi $s_d = 0$, oricît de mic ar fi $\nu(d)$, deci $f(x)$ nu este integrabilă în raport cu $\alpha(x)$. Se deduce de aici următoarea situaţie aparent ciudată: se poate ca $\int_a^c f(x)d\alpha(x)$ şi $\int_c^b f(x)d\alpha(x)$ să existe şi $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ să nu aibă sens!

Este suficient să luăm $\alpha(x)$ şi pe $f(x)$ ca mai înainte şi puteţi verifica imediat afirmaţiile noastre!

Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și $\alpha(x)$ cu variație mărginită, avem inegalitatea $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right| \leqslant \| f \| \cdot \mathrm{Var}\, \alpha$, unde Var α este variația lui α pe intervalul $[a, b]$.

Aceasta se obține imediat, evaluînd sumele $\sum f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$ și ținînd seama de definiția variației totale a unei funcții. La fel de simplu se demonstrează că dacă f_1 și f_2 sînt integrabile în raport cu α, atunci $\lambda f_1 + \mu f_2$ va fi de asemenea integrabilă (λ și μ constante) și că

$$\int_a^b (\lambda f_1 + \mu f_2)\mathrm{d}\alpha = \lambda \int_a^b f_1 \mathrm{d}\alpha + \mu \int_a^b f_2 \mathrm{d}\alpha.$$

Proprietățile acestea ne spun că funcționala liniară $f \to L(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$ definită pe $C(I)$ (am notat $[a,b]$ cu I) este continuă. Remarcabil este că și reciproca e adevărată și aceasta constituie *teorema lui F. Riesz*: orice funcțională liniară și continuă pe $C(I)$ este de forma $f \to \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$, $\alpha(x)$ fiind o funcție cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrația se face în mai multe etape. Să presupunem la început că funcționala L pe $C(I)$, continuă, este și pozitivă, cu alte cuvinte că $f \geqslant 0$ implică și $L(f) \geqslant 0$, deci că $f \geqslant g$ implică și $L(f) \geqslant L(g)$. Vom prelungi funcționala la o clasă mai largă de funcții. Pentru aceasta vom considera șiruri crescătoare de funcții continue pe I: $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \leqslant \ldots \leqslant f_k(x) \leqslant \ldots$, cu proprietatea că există o constantă finită K astfel ca $f_n(x) \leqslant K$ pentru orice $n = 1,2,\ldots$ și orice $x \in I$ (vom spune că șirul $\{f_n\}$ este uniform mărginit). Aceasta implică faptul că $L(f_1) \leqslant L(f_2) \leqslant \ldots \leqslant L(f_n) \leqslant KL(1)$, deci șirul de numere $\{Lf_k\}$ are o limită finită.

În ceea ce privește $\lim f_n(x) = f(x)$ avem două posibilități: sau $f(x)$ este continuă și în acest caz, aplicînd teorema lui Dini, rezultă că șirul f_n converge uniform către f, deci $L(f) = \lim L(f_n)$, sau $f(x)$ nu este continuă. *Definim* atunci pe $L(f)$ ca $\lim L(f_n)$. Rămîne de arătat că definiția este corectă, cu alte cuvinte că valoarea $L(f)$ nu depinde de

Frederic Riesz
(1880—1956)



şirul $\{f_n\}$ de funcţii continue care tinde către f. Aceasta rezultă din următoarea proprietate mai generală: dacă f_n şi g_n sînt două şiruri crescătoare de funcţii continue, uniform mărginite, şi dacă $\lim f_n = f \leqslant \lim g_n = g$, atunci $\lim L(f_n) \leqslant L(g_n)$. Odată demonstrată această proprietate, rezultă nu numai corectitudinea definiţiei lui $L(f)$, ci şi monotonia funcţionalei astfel prelungite.

Fie $[f_n(x) - g_k(x)]^+$ definită ca partea pozitivă a funcţiei $f_n - g_n$, adică funcţia definită ca $\max(0, (f_n(x) - g_n(x)))$ (se vede imediat că această funcţie este continuă). Monotonia şirului g_n şi faptul că $\lim f_k \leqslant \lim g_n$ implică $[f_n(x) - g_k(x)]^+ \searrow 0$. Aplicînd iar teorema lui Dini, convergenţa rezultă uniformă pe $[a, b]$, deci $L([f_n - g_k]^+) \to 0$ cînd $k \to \infty$.

Cum $f_n - g_k \leqslant [f_n - g_k)]^+$, atunci $L(f_n - g_n) \leqslant L([f_n - g_k]^+)$, prin urmare $Lf_n - \lim Lg_k \leqslant 0$ pentru orice n, deci şi $\lim_{n\to\infty} Lf_n - \lim_{k\to\infty} Lg_k \leqslant 0$, adică ceea ce căutam.

Este clar că, dacă L este definită pentru f şi g, ea va fi definită şi pentru $f + g$ şi pentru λf cu λ constantă pozitivă şi că $L(f + g) = L(f) + L(g)$ şi $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ $(\lambda > 0)$.

În ceea ce priveşte funcţiile de forma $f - g$, cu f şi g obţinute ca limite de şiruri crescătoare şi uniform mărginite de funcţii continue pe $[a, b]$, se defineşte $L(f-g)$ ca $L(f) - L(g)$. Şi aici se pune problema corectitudinii.

Dacă $f-g = f_1-g_1$, trebuie arătat că $L(f-g) = Lf - Lg = Lf_1 - Lg_1 = L(f_1-g_1)$, ceea ce rezultă imediat, căci $f + g_1 = f_1 + g$, deci $Lf + Lg_1 = Lf_1 + Lg$ şi deci $Lf-Lg = Lf_1-Lg_1$.

În modul acesta funcţionala liniară L, definită iniţial doar pentru funcţiile din $C(I)$, a fost prelungită, ca o funcţională liniară, la funcţiile ce se obţin ca limite de şiruri monotone, uniform mărginite.

Fie acum λ, $a < \lambda \leqslant b$, şi $e_\lambda(x)$ funcţia caracteristică a intervalului $[a, \lambda]$, deci $e_\lambda(x) = 1$ dacă $x \in [a, \lambda]$ şi $e_\lambda(x) = 0$ pentru $x \in (\lambda, b)$. Funcţia $e_a(x)$ o definim ca funcţia identic nulă pe $[a, b]$. Este evident că $e_\lambda(x)$ poate fi obţinută ca limita unui şir crescător uniform mărginit de funcţii din $C(I)$, $(\lambda > a)$; $e_\lambda(x)$ va fi limita funcţiilor $\varphi_n(x)$ egale cu 1 pentru $x \in \left[a, \lambda - \frac{1}{n}\right]$, nule pentru $x \in [\lambda, b]$, şi liniare pe $\left[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda\right]$.

Fie $\alpha(\lambda) = Le_\lambda$ (definiţia are sens datorită observaţiei anterioare). Dacă $\lambda < \lambda'$, $e_\lambda(x) \leqslant e_{\lambda'}(x)$, deci $Le_\lambda \leqslant Le_{\lambda'}$, cu alte cuvinte funcţia $\alpha(\lambda)$ este o funcţie *crescătoare*; $\alpha(a) = L(0) = 0$ şi $\alpha(b) = L(1) = \| L \|$.

Ei bine, pentru orice funcţie *continuă* $f(x)$, $Lf = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$ cu alte cuvinte am obţinut reprezentarea căutată în cazul funcţionalelor pozitive!

Să demonstrăm ultima afirmație; pentru aceasta vom considera funcția $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[e_{\lambda_k}(x) - e_{\lambda_{k-1}}(x)]$, $a=\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$ fiind o diviziune arbitrară a intervalului $[a,b]$ și $\xi_k \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$. Funcția $\varphi(x)$ va fi evident o funcție în scară. Cum $f(\xi_k)$ sînt constante pentru $k=1,2,\ldots, n$, atunci

$$L\varphi = \sum f(\xi_k)\ [Le_{\lambda_k} - Le_{\lambda_{k-1}}] = \sum f(\xi_k)\ [\alpha(\lambda_k) - \alpha\ (\lambda_{k-1})].$$

Fie ω_k oscilația* lui $f(x)$ pe intervalul $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ și $\omega = \sup\limits_{k=1,\ldots,m} \omega_k$. Este clar că $|\ \varphi(x) - f(x)\ | < \omega$ pentru orice $x \in [a, b]$, deci $|Lf - L\varphi\ | = |\ L(f - \varphi)\ | \leqslant L(\omega) = \omega L(1)$.

Dacă facem acum pe $\nu(d)$ să tindă către zero, continuitatea uniformă a lui $f(x)$ implică și $\omega \to 0$, deci $L\varphi \to Lf$. Dar $L\varphi \to \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$, deci $L(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$.

Cazul cînd funcționala L nu este pozitivă se poate reduce, cu prețul unor argumente ce merită a fi redate, la cazul studiat mai sus. Toată problema se rezumă la a arăta că o funcțională liniară continuă oarecare L se poate reprezenta ca diferența $P - N$ a două funcționale liniare pozitive (căci, odată acest fapt demonstrat, aplicăm rezultatul dinainte și totul este terminat!).

Fie deci $f(x)$ o funcție continuă pe $[a,b]$, pozitivă. Se definește $Pf = \sup\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant f} L\varphi$. Cum condiția $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ atrage $\|\varphi\| \leqslant \|f\|$ și continuitatea lui L atrage $|\ L(\varphi)\ | \leqslant \|L\|\ \|\varphi\|$, avem $|L(\varphi)| \leqslant \|L\|\ \|f\|$, deci Pf este finit. Este clar că $Pf \geqslant 0$, căci $0 \leqslant f$, deci $Pf > L(0) = 0$.

Se definește apoi Nf ca fiind egală cu $Pf - Lf$. Avem deci la îndemînă două funcționale pozitive, dar trebuie arătat că ele sînt și aditive și pozitiv omogene, căci apoi prelungindu-le prin liniaritate pe întreg $C(I)$ (inițial ele sînt definite doar pentru funcții nenegative din $C(I)$), obținem ceea ce căutăm. Omogenitatea (i.e. $P(\lambda f) = \lambda P(f)$ pentru

---

* Adică diferența dintre marginea superioară și cea inferioară a lui $f(x)$ pe intervalul considerat.

$\lambda > 0$) este evidentă. Pentru aditivitate trebuie arătat că $P(f+g) = P(f) + P(g)$ pentru orice f, $g \geqslant 0$ din $C(I)$.

Inegalitatea $P(f+g) \geqslant P(f) + P(g)$ rezultă imediat. Cealaltă, $P(f+g) \leqslant P(f) + P(g)$ se arată astfel: $P(f+g) = \sup\limits_{0 \leqslant \sigma \leqslant f+g} L(\sigma)$. Acum orice funcție continuă $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant f(x) + g(x)$ pe $[a, b]$ se poate scrie sub forma unei sume $\sigma(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ cu $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ și $0 \leqslant \psi(x) \leqslant g(x)$. Într-adevăr, luăm $\varphi(x) = \min\,[\sigma(x), f(x)]$, care va fi desigur continuu și $\psi(x) = \sigma(x) - \varphi(x)$. Din definiție rezultă clar că $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$. Apoi, pentru punctele în care $\varphi(x) = \sigma(x)$, $\psi(x)$ rezultă nul, deci în acele puncte $0 = \psi(x) \leqslant g(x)$. În celelalte puncte $\psi(x) = \sigma(x) - f(x)$ și cum $\sigma \leqslant f + g$, vom avea $\psi(x) \leqslant f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$, q.e.d.

Cu această descompunere la dispoziție, raționăm astfel: oricărui $\sigma(x)$, $0 < \sigma(x) \leqslant f(x) + g(x)$ îi corespund două funcții φ și ψ ca mai sus, deci $L(\sigma) = L(\varphi + \psi) = L(\varphi) + L(\psi)$ și trecînd la marginile superioare se obține inegalitatea căutată, q.e.d.

După cum am remarcat, prelungind pe P (N rezultă) obținem descompunerea căutată. Prelungirea se face astfel: orice $f \in C(I)$ se poate descrie ca *diferența* a două funcții continue pe I, $f = f_1 - f_2$. Atunci Pf se va defini ca $Pf_1 - Pf_2$.

Continuitatea lui P și N este asigurată chiar din definiție, deci teorema este complet demonstrată.

Descompunerea obținută nu este desigur unica posibilă, dar într-un sens este cea mai „economică"; anume, P are proprietatea că, dintre toate funcționalele T ce „majorează" pe L în sensul că $T(f) \geqslant L(f)$ pentru orice $f \in C(I)$, P este cea mai mică (adică este majorată de oricare altă funcțională liniară T ce majorează pe L), iar N este cea mai mică majorantă a lui L.

Se poate pune problema unicității funcției $\alpha(x)$ cu ajutorul căreia se reprezintă funcționala L. Fără a insista asupra acestei chestiuni, amintim doar că trebuie impusă funcției $\alpha(x)$ o condiție suplimentară „de normare" pentru

a avea unicitatea; de pildă se poate cere ca $\alpha(a) = 0$, $\alpha(x) = \frac{1}{2}(\alpha(x+0) + \alpha(x-0))$ pentru $a < x < b$ (se pot da şi alte condiţii de normalizare).

Teorema lui F. Riesz ne oferă un prim exemplu de reprezentare a funcţionalelor liniare. În capitolul III am discutat destul de mult despre funcţionalele liniare şi continue, dar cu excepţia celor pe R^n, nu ştiam de loc cum pot arăta ele. Vom mai întîlni unele reprezentări de funcţionale liniare şi continue şi pe alte spaţii în capitolele următoare.

În afara faptului că ea apare ca o generalizare foarte firească a integralei Riemann şi în afara legăturii importante date de teorema lui Riesz, integrala Stieltjes intervine în mod natural în diferite chestiuni de mecanică, sau mai ales, de calculul probabilităţilor. De pildă, ori de cîte ori se consideră „o distribuţie de mase" care nu are în mod necesar o densitate, şi trebuie calculat un centru de greutate sau un moment de inerţie, apare o integrală Stieltjes.

Integrala Stieltjes construită în acest paragraf se numeşte de fapt integrala Riemann-Stieltjes, pentru că a fost construită pornind de la sume analoge sumelor Riemann şi pentru că se poate defini şi o integrală mai generală, numită integrala Lebesgue-Stieltjes. Despre alte proprietăţi ale integralei Riemann-Stieltjes, cum ar fi de pildă comportarea faţă de operaţia de trecere la limită, nu vom spune nimic. Ne mărginim doar să remarcăm că dacă funcţia $\alpha(x)$ este derivabilă, atunci se conchide uşor că $\int f(x)d\alpha(x)$ se reduce la $\int f(x)\alpha'(x)dx$, deci la o integrală Riemann uzuală.

Teorema de reprezentare a lui Riesz se poate generaliza, obţinîndu-se astfel reprezentarea funcţionalelor liniare şi continue pe spaţiul $C(K)$ al funcţiilor continue, definite pe un spaţiu compact K oarecare. Se arată în acest caz că orice funcţională liniară şi continuă Φ se poate reprezenta sub forma: $\Phi(f) = \int f d\mu$, μ fiind o măsură (unic determinată de Φ) ce ia în general valori complexe, este definită

pe toate mulţimile boreliene şi posedă o aşa-numită proprietate de „regularitate" (pe care n-o explicităm), proprietate ce este de pildă automat verificată în spaţiile euclidiene (şi de asemenea în cazuri mult mai generale).

Norma $\|\Phi\|$ a lui Φ se arată că este egală cu $|\mu|(K)$, unde $|\mu|$ este o măsură pozitivă numită „variaţia totală a lui μ". Măsura $|\mu|$ se defineşte astfel: dacă μ este definită pe o familie $\mathfrak{M}$ ce cuprinde toate mulţimile boreliene, dacă $E \in \mathfrak{M}$, atunci $|\mu|(E) = \sup \sum |\mu|(E_i)$, superiorul fiind luat după toate partiţiile $\{E_i\}$ (cu $E_i \cap E_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ şi $E_i \in \mathfrak{M}$) ale lui E (desigur $E = \bigcup_i E_i$).

Remarcaţi extrema generalitate a rezultatului; spaţiul K poate fi un spaţiu compact oricît de general.

Nu vom demonstra această formă generală a teoremei lui Riesz, dar o vom utiliza în ultimul capitol.

CAPITOLUL V

SPAȚII ŞI FUNCȚII

Despre unele spații de funcții

Matematicienii au demonstrat destul de curînd, chiar înainte ca noțiunea de funcție să se fi degajat cu deplină claritate, utilitatea folosirii reprezentării unor funcții prin altele mai simple; Euler utiliza sistematic şi cu succes dezvoltările în serie de puteri, D. Bernoulli a atras atenția asupra posibilității utilizării seriilor trigonometrice în rezolvarea ecuației coardei etc. Cu alte cuvinte, foarte adesea este interesant şi util să se studieze o funcție, nu ca un obiect individual şi izolat, ci în legătură cu alte funcții. Deci această idee este cunoscută de multă vreme şi utilizată adesea. Totuşi lucrurile au căpătat un caracter mult mai clar, atunci cînd s-a constatat că o serie întreagă de fapte ale Analizei Matematice, legate de mulțimile de funcții, au un aspect geometric destul de simplu, datorită caracterului lor liniar. În capitolul III am expus destul de amănunțit unele chestiuni legate de partea generală a teoriei. Acum însă, folosind în mod esențial integrala Lebesgue, vom considera unele exemple de spații vectoriale local conexe, extrem de importante. De altfel, din punct de vedere istoric, tocmai acestea au fost exemplele care i-au condus pe Hilbert, Riesz, Banach, M. Fréchet la o teorie generală.

Pe de altă parte, acestea sînt, într-un sens evident, cele mai simple spații vectoriale topologice.

Pentru a le defini, să ne reîntoarcem, pentru o clipă, la integrala Lebesgue. După cum ați văzut, integrala unei funcții nu depinde de toate valorile luate de funcție, ci de aproape toate aceste valori. Mai precis, dacă două funcții integrabile coincid aproape peste tot, ele au aceeaşi integrală. Aceasta rezultă evident din însăşi construcția integralei. De aceea, în cele ce urmează vom identifica funcțiile care diferă doar pe mulțimi de măsură nulă. Mai precis,

aceasta înseamnă că în mulţimea funcţiilor definite, să zicem, pe dreapta reală (aceleaşi consideraţii se fac şi în cazul general al unui spaţiu arbitrar pe care s-a definit o măsură) se introduce o relaţie de echivalenţă: $f \sim g$ dacă şi numai dacă $f(x) \neq g(x)$ pentru o mulţime de puncte x, de măsură Lebesgue nulă.

Clasele de echivalenţă faţă de această relaţie nu vor fi, desigur, decît familiile de funcţii ce diferă între ele doar pe mulţimi de măsură nulă. Făcînd un abuz de limbaj, vom utiliza cuvîntul funcţie şi atunci cînd ne vom referi la o astfel de clasă de echivalenţă.

Să considerăm acum mulţimea funcţiilor, definite pe o mulţime măsurabilă $\Omega \subset R^1$, care sînt măsurabile (adică limite aproape peste tot de funcţii în scară dacă funcţiile considerate au valori reale, sau, dacă se consideră funcţii ce iau valori complexe, părţile lor reale şi imaginare au această proprietate) şi de pătrat integrabil.

Notăm această mulţime (mai precis, clasele de echivalenţă faţă de relaţia $\sim$ de mai înainte) cu $L^2(\Omega)$. În particular, Ω poate fi intervalul $[0,1]$, sau chiar întreaga dreaptă R^1.

Ce se poate spune despre această mulţime de funcţii? $L^2(\Omega) = L^2$ este un spaţiu vectorial, cu o structură geometrică destul de simplă (deşi este, desigur, infinit dimensional). Este evident că dacă $f \in L^2$, atunci λf va aparţine de asemenea lui L^2. Dacă $f_1, f_2 \in L^2$, trebuie verificat că şi $f_1 + f_2 \in L^2$. În ceea ce priveşte măsurabilitatea lui $f_1 + f_2$, aceasta este evidentă. Mai trebuie arătat că $(f_1 + f_2)^2$ este integrabilă Lebesgue.

Dar $|f_1 + f_2|^2 \leqslant |f_1|^2 + 2|f_1|\,|f_2| + |f_2|^2$, deci va fi suficient de verificat că $|f_1 f_2|$ este integrabilă. Măsurabilitatea funcţiei $f_1 f_2$ rezultă din proprietăţile funcţiilor măsurabile. Vom arăta mai mult, anume că

$$\int |f_1 f_2|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int |f_1|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int |f_2|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} {}^{*},$$

* Pentru simplificarea scrierii am omis indicarea domeniului de integrare.

această inegalitate numindu-se inegalitatea lui Schwartz. Demonstrația se vede imediat; într-adevăr, pentru orice număr pozitiv α

$$|f_1(x)f_2(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\alpha |f_1(x)|^2 + \frac{1}{\alpha}|f_2(x)|^2\right],$$

deci

$$\int |f_1 f_2| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left[\alpha \int |f_1|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha}\int |f_2|^2 \mathrm{d}x\right].$$

Dacă unul din termenii ce figurează în membrul al doilea este egal cu zero, de pildă $\int |f_1|^2 \mathrm{d}x = 0$, atunci în mod necesar $f_1 = 0$ aproape peste tot, deci $|f_1 f_2| = 0$ aproape peste tot și deci inegalitatea (în acest caz chiar egalitate) este verificată.

În cazul contrar α poate fi ales astfel încît $\int |f_1(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^2}\int |f_2(x)|^2 \mathrm{d}x$.

Dar în acest caz membrul din dreapta va fi egal și cu $\left(\int |f_1|^2 \mathrm{d}x \cdot \int |f_2|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$, de unde concluzia căutată*. În inegalitatea lui Schwartz avem egalitate doar dacă $f_1 = cf_2$, $c \neq 0$, egalitatea avînd loc, desigur, aproape peste tot.

Să introducem notațiile următoare:

$$(f, g) = \int f\bar{g} \mathrm{d}x, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2} = \left(\int |f|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

unde $\bar{g}(x)$ este conjugatul complex al lui $g(x)$; deci, în particular, $f(x)\bar{f}(x) = |f(x)|^2$, prin urmare $\|f\|$ va fi un

---

* Am utilizat faptul banal că $\frac{1}{2}(a + a) = \sqrt{a^2}$. În cazul de față

$$a = \alpha \int |f_1|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int |f_2|^2 \mathrm{d}x.$$

număr pozitiv sau nul. Dacă se consideră doar funcţii cu valori reale, atunci (f, g) se poate defini şi ca $\int fg dx$ (deoarece $\bar{g} = g$).

Numărul (în genere complex) (f, g) se numeşte ***produsul scalar*** al funcţiilor f şi g, iar $\|f\|$ norma funcţiei f.

Ce proprietăţi verifică norma şi produsul scalar?

E uşor de văzut că

1° $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
2° $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$;
3° $(f, g) = \overline{(g, f)}$.

Inegalitatea lui Schwartz se poate scrie sub forma

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \|g\|$$

Sub această formă ea a fost demonstrată în capitolul IV. Dar demonstraţia dată acolo utiliza faptul că produsul scalar era definit pe un spaţiu vectorial. În cazul lui L^2 trebuie mai întîi *verificat* că avem de-a face cu un spaţiu vectorial, şi această verificare ne va furniza totodată şi inegalitatea cerută.

În ceea ce priveşte norma $\|f\|$, trebuie justificată denumirea. Ştim (aceasta este definiţia) că o normă definită pe un spaţiu vectorial E este o funcţie $\|\cdot\|: E \to R$ astfel ca:

1° $\|f\| > 0$ dacă $f \neq 0$;
2° $\|f\| = 0$ implică $f = 0$;
3° $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ pentru orice scalar λ;
4° $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Tocmai verificarea proprietăţii 1° cere identificarea funcţiilor egale aproape peste tot. În modul acesta, a spune că $f = 0$ înseamnă de fapt că f se anulează pentru aproape orice x, iar $f \neq 0$ înseamnă că f este diferit de zero pe o mulţime de măsură pozitivă şi deci $\|f\| > 0$. Proprietăţile 2° şi 3° sînt evidente.

În ceea ce priveşte 4°, ea este un caz particular a aşanumitei inegalităţi a lui Minkowski. Iată demonstraţia:

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f + g) + (g, f + g);$$

Aplicînd inegalitatea lui Schwartz rezultă

$$|(f, f+g)| \leqslant \|f\| \, \|f+g\| \text{ şi } |(g, f+g)| \leqslant \|g\| \, \|f+g\|,$$

de unde

$$\|f+g\|^2 \leqslant (\|f\| + \|g\|)(\|f+g\|).$$

Dacă $\|f+g\| \neq 0$, împărţim cu $\|f+g\|$ şi obţinem inegalitatea căutată.
Dacă $\|f+g\| = 0$, atunci inegalitatea lui Minkowski este evidentă, q.e.d.

Iată deci că mulţimea L^2 poate fi organizată ca un spaţiu normat şi de aceea, de acum încolo, o vom numi „spaţiul L^2" sau spaţiul funcţiilor de pătrat sumabil.

Din 4° rezultă imediat că $\|f-g\| \leqslant \|f-h\| + \|h-g\|$, şi (ceea ce amintisem de fapt şi într-un capitol precedent) că funcţia $d(x,y) = \|x - y\|$ este o distanţă în L^2. Extrem de important este însă faptul că norma spaţiului L^2 se obţine cu ajutorul unui produs scalar. Formal, produsul scalar $(f,g) = \int f\bar{g}$ are toate proprietăţile produsului scalar din R^n; ştim că în R^n relaţia $(v_1, v_2) = 0$ este echivalentă cu ortogonalitatea vectorilor v_1 şi v_2. Prin analogie, vom spune că f şi g sînt ortogonale dacă $(f, g) = 0$.

O proprietate importantă a spaţiului L^2 este *completitudinea* sa; dacă un şir $\{f_n\}$, cu $f_n \in L^2$ este un şir Cauchy (desigur faţă de norma $\|f\| = \int |f|^2 dx$), deci dacă $\|f_n - f_m\| \to 0$ pentru $n,m \to \infty$, atunci există o funcţie $f \in L^2$, astfel ca $f = \lim f_n$, sau, altfel spus, astfel ca $\|f - f_n\| \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Aici apare faptul că avem de-a face cu integrala Lebesgue şi nu cu integrala Riemann: dacă am considera şiruri Cauchy de funcţii integrabile Riemann, s-ar putea ca limita să nu mai fie o funcţie integrabilă Riemann.

Completitudinea spaţiului L^2 este cunoscută sub numele de teorema Fischer-Riesz. Demonstraţia ei, pe care o dăm în cele ce urmează, se sprijină esenţial pe teorema lui B. Levi şi pe lema lui Fatou.

Fie deci $\{f_n\}$ un şir Cauchy de funcţii aparţinînd spaţiului L^2. Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un indice $N(\varepsilon)$ astfel încît, dacă $m,n > N(\varepsilon)$, atunci $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Trebuie să arătăm că există un element $f \in L^2$, care este limita (în L^2) a şirului lui f_n, i.e. care verifică $\int |f_n - f|^2 dx \to 0$, cînd $n \to \infty$. (Această convergenţă este mult mai „grosolană" decît convergenţa punctuală, la rîndul ei mai puţin „bună" decît convergenţa uniformă.)

Să presupunem, pentru început, că Ω este mărginită deci $m(\Omega)$ este finită. Fie $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, $n = 1,2,\ldots$ Există indici $m_1, m_2,\ldots, m_n,\ldots$ cu proprietatea că dacă $m, p > m_n$, atunci $\|f_p - f_m\| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Atunci, aplicînd inegalitatea lui Schwartz funcţiilor $|f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|$ şi $\chi_\Omega(x)$ (funcţia caracteristică a mulţimii Ω), găsim

$$\int |f_{m_{n+1}} - f_{m_n}| dx < \sqrt{m(\Omega)}\, \|f_{m_{n+1}} - f_{m_n}\| \leqslant \sqrt{m(\Omega)}\, \frac{1}{2^n},$$

deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_{m_{n+1}} - f_{m_n}| dx$ este convergentă. Dar teorema lui B. Levi ne asigură, în acest caz, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} [f_{m_n}(x) - f_{m_n}(x)]$ converge, aproape peste tot pe Ω, către o funcţie $\varphi(x)$. A spune că seria aceasta converge (avem de fapt chiar convergenţă absolută) înseamnă că sumele ei parţiale converg către $\varphi(x)$ (aproape peste tot); dar sumele parţiale nu sînt decît funcţiile $f_{m_n}(x) - f_{m_1}(x)$. Punînd $f(x) = \varphi(x) - f_{m_1}(x)$, obţinem deci că $f_{m_n}(x)$ converge aproape peste tot către $f(x)$.

Acum, dacă $n > m_k$, avem

$$\int_\Omega |f_n(x) - f_{m_k}(x)|^2 dx = \|f_n - f_{m_k}\|^2 < \frac{1}{2^{2k}}.$$

În plus, pentru n fixat, $|f_n(x) - f_{m_k}(x)|^2$ tinde (aproape peste tot) către $|f_n - f(x)|^2$, pentru $m_k \to \infty$. Putem aplica lema lui Fatou, deci, $|f_n(x) - f(x)|^2$ este integrabilă și $\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{2^{2k}}$, $n \geqslant m_k$. Cu alte cuvinte, $f_n - f \in L^2(\Omega)$, deci $f = f_n - (f_n - f) \in L^2$. Este de asemenea evident că $\|f_n - f\| \to 0$, cînd $n \to \infty$.

În cazul în care Ω nu este mărginit, de pildă $\Omega = R^1$, ținem seama că Ω se poate scrie ca o reuniune numărabilă de mulțimi Ω' mărginite și, din faptul că $f_n(x) - f_{m_k}(x)$ converg aproape peste tot către $\varphi(x)$ pe fiecare Ω', rezultă aceeași concluzie pentru întreg Ω. Restul raționamentului rămîne același. Teorema este complet demonstrată.

Bineînțeles, dacă $f = \lim f_n$ în L^2, atunci șirul $\{f_n\}$ este șir Cauchy.

Un alt exemplu important de spațiu de funcții este spațiul $L^1(\Omega)$ al funcțiilor integrabile (Ω fiind, ca mai înainte, o mulțime măsurabilă). Poate părea ciudat faptul că am vorbit mai întîi despre spațiul funcțiilor de pătrat integrabil, și abia apoi despre spațiul funcțiilor integrabile! Dar spațiul $L^1(\Omega)$ este, într-un anume sens, mai puțin simplu decît spațiul $L^2(\Omega)$, pentru că în el nu avem definit un produs scalar.

Norma în $L^1(\Omega)$ va fi, desigur, $\|f\| = \int |f(x)|dx$. Și aici, bineînțeles, lucrăm de fapt cu clase de funcții echivalente, identificînd funcțiile egale aproape peste tot (altfel $\|f\|$ n-ar mai fi o normă). Este evident că L^1 este un spațiu vectorial. Ce se poate spune despre completitudine? Examinați vă rog atent demonstrația teoremei lui Riesz — Fischer; păstrînd notațiile, din definiția normei în L^1 rezultă direct (fără a utiliza inegalitatea lui Schwartz) că seria $|f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|$ converge aproape peste tot fără a fi nevoie de-a face, la început, presupunerea suplimentară că Ω este mărginit. Restul demonstrației decurge la fel, înlocuind pătratele modulelor cu modulele. Deci $L^1(\Omega)$ este complet.

Dar norma lui L^1 nu mai provine dintr-un scalar! Nu putem deci vorbi de ortogonalitate în spaţiul L^1 şi aceasta complică mult structura sa geometrică.

O caracteristică comună a spaţiilor funcţiilor integrabile, respectiv de pătrat integrabil, definite pe R^1, sau, mai general, pe R^n este *separabilitatea lor* *. Prin aceasta se înţelege că există o mulţime *numărabilă* de funcţii, dense în L^2 (respectiv în L^1). Mai precis, există funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, astfel încît, pentru orice $f \in L^2$ şi orice $\varepsilon > 0$, există o funcţie f_m cu proprietatea $\int |f - f_m|^2 dx < \varepsilon$ (enunţ analog pentru spaţiul L^1). Demonstraţia este un bun exerciţiu lăsat pe seama cititorului; ca indicaţie menţionăm că este suficient să se considere cazul $\Omega = R^1$, apoi, pentru orice $f \in L^2(R^1)$ (raţionament analog pentru $f \in L^1$), să se considere funcţia $f_n = f$ pe $(-n, +n)$, nulă în afara acestui interval, a se „trunchia" apoi pe f_n (i.e. se scrie $f'_n(x) = f_n(x)$ dacă $-n \leqslant f_n(x) \leqslant n$, şi $f'_n(x) = n$ (respectiv $f'_n(x) = -n$) dacă $f_n(x) \geqslant n$ (respectiv $f_n(x) \leqslant -n$)) şi a se recurge apoi la funcţiile în scară cu valori raţionale şi puncte de discontinuitate raţionale pentru a aproxima, în L^2, funcţiile „trunchiate".

Se poate verifica de asemenea că mulţimea funcţiilor continue cu suport compact este densă atît în L^1 cît şi în L^2 (dacă $\Omega = R^1$, nu orice funcţie continuă este integrabilă, sau de pătrat integrabil). Aceste proprietăţi de densitate sînt extrem de utile, pentru că ele, atunci cînd dorim să stabilim unele proprietăţi privind toate funcţiile din L^2 (sau din L^1), permit să demonstrăm proprietăţile căutate în cazul funcţiilor unei submulţimi dense (de pildă pentru funcţiile continue cu suport compact, sau pentru funcţiile în scară) ceea ce poate fi destul de simplu, şi apoi să utilizăm densitatea funcţiilor considerate. Vom vedea un astfel de exemplu în ultimul capitol.

---

* În cazul spaţiului funcţiilor integrabile, sau al celor de pătrat integrabil definite pe alte spaţii topologice, proprietatea de separabilitate nu este verificată totdeauna.

Exact cum am definit spațiile L^1 și L^2 putem defini, în general, spațiul L^p, cu $1 \leqslant p < \infty$. Anume, $L^p(\Omega)$ va fi spațiul funcțiilor $f(x)$ (de fapt, al claselor de funcții echivalente) măsurabile și de putere p sumabile. Norma va fi dată de $\|f\| = \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Pentru a evita confuziile, vom nota această normă cu $\|f\|_p$ $\left(\text{deci } \|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2},\right.$ $\left.\|f\|_1 = \int |f(x)| dx\right)$.

Faptul că $\|f\|_p$ este într-adevăr o normă (mai precis că $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$) rezultă dintr-o inegalitate importantă, numită inegalitatea lui Hölder: dacă $f \in L^p$ și $g \in L^q$, cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p > 1)$, atunci $f(x)g(x)$ este integrabilă și $\int f(x)g(x)dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ (de remarcat că dacă $p = \frac{1}{2}$, regăsim inegalitatea lui Schwartz.

Demonstrația se bazează pe o inegalitate elementară. Fie $\alpha \in (0,1)$ și fie funcția $\psi(x) = x^\alpha - \alpha x$, definită pe $(0, \infty)$. Se verifică imediat că $\psi(x)$ își atinge maximul în punctul $x = 1$, deci $\psi(x) \leqslant \psi(1) = 1 - \alpha$ adică $x^\alpha \leqslant \alpha x + 1 - \alpha$. Alegem acum pe x de forma $x = \frac{A}{B}$, cu A și B pozitive. Inegalitatea de mai înainte devine (după o înmulțire cu B)

$$A^\alpha B^{1-\alpha} \leqslant \alpha A + (1-\alpha) B.$$

Numărul α este la libera noastră alegere; îl alegem $\alpha = \frac{1}{p}$ $\left(\text{deci } 1 - \alpha \text{ va fi } \frac{1}{q}\right)$ și obținem

$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q}.$$

Alegem acum pe A şi B; notînd cu $f_1(x)$ şi $g_1(x)$ funcţiile $\frac{f(x)}{\|f\|_p}$ şi respectiv $\frac{g(x)}{\|g\|_q}$, luăm $A = |f_1(x)|^p$ şi $B = |g_1(x)|^q$ (am presupus că atît $\|f\|_p$ cît şi $\|g\|_q$ sînt nenule, căci în caz contrar inegalitatea lui Hölder este evidentă). Atunci

$$|f_1(x)g_1(x)| \leqslant \frac{f_1(x)^p}{p} + \frac{g_1(x)^q}{q}.$$

Dar cum atît $\frac{|f_1(x)|^p}{p}$ cît şi $\frac{|g_1(x)|^q}{q}$ sînt funcţii integrabile, din inegalitatea de mai sus rezultă că şi produsul $f_1 g_1$ va fi integrabil. Putem integra şi găsim că

$$\int |f_1(x)g_1(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

sau, ţinînd seama de definiţia funcţiilor f_1 şi g_1,

$$\int |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Cum $\left|\int f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x$, inegalitatea lui Hölder este demonstrată.

Inegalitatea $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ se numeşte inegalitatea lui Minkowski şi se deduce uşor din inegalitatea lui Hölder.

Urcînd în continuare scara complexităţii, mai dăm încă un exemplu: fie $L^1_{\mathrm{loc}}(R^1)$ spaţiul funcţiilor măsurabile care sînt local integrabile. O funcţie este local integrabilă, dacă ea este integrabilă pe orice compact. Pe $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(R^1)$ se introduce în mod natural o topologie cu ajutorul sistemului de seminorme $\mathrm{p}_k(f) = \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x$, K parcurgînd familia tuturor mulţimilor compacte din R^1. Un sistem echivalent de seminorme (deci un sistem care induce pe $L^1_{\mathrm{loc}}(R^1)$ aceeaşi topologie ca p_k este dat de şirul de seminorme $p_n(f) = \int_{K_n} f(x)\mathrm{d}x$,

unde K_n este un şir de compacte din R^1 cu proprietatea că orice compact K este inclus într-un K_n.

În mod analog putem defini spaţiile L^2_{loc} sau mai general L^p_{loc}.

Spaţii Hilbert şi Banach

Avem acum destul material pentru a trece din nou la o discuţie „abstractă". Anume, din cele spuse mai înainte vom extrage unele definiţii generale, apoi din manipularea acestor noţiuni, vom deduce unele rezultate şi vom vedea ce dau ele în cazurile „concrete" întîlnite mai înainte.

Din considerente de economie de spaţiu nu ne vom permite să dăm prea multe aplicaţii. Deci acest paragraf este dedicat părţii abstracte.

Vom spune că un spaţiu vectorial H este un spaţiu Hilbert (real sau complex, după cum corpul scalarilor este corpul R sau C), dacă s-a dat pe H un produs scalar (u, v), astfel ca $\| u \| = (u, u)^{1/2}$ să fie o normă faţă de care spaţiul H este complet.

Să presupunem că H este un spaţiu Hilbert complex. Produsul scalar este o aplicaţie definită pe $H \times H$ cu valori în C: perechii (u, v) i se atribuie un număr complex (u, v) astfel încît:

1° $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$;
2° $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$;
3° $\lambda (u, v) = (\lambda u, v)$;
4° $(u, \lambda v) = \bar{\lambda} (u, v)$;
5° $(u, v) = \overline{(v, u)}$;
6° $(u, u) \geqslant 0$.

Remarcaţi că de fapt 4° şi 2° rezultă din 1° şi 5°. (Bara înseamnă trecerea la conjugatul complex.)

In cazul în care H ar fi un spațiu Hilbert real, în aceste proprietăți dispare conjugarea complexă, iar valorile produsului scalar sînt numere reale.

Norma $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ într-un spațiu Hilbert se bucură de următoarea proprietate caracteristică („regula paralelogramului"):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Demonstrația se reduce la o simplă verificare:

$$(x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + \\ + (y, x) + (x, x) + (y, y) - (y, x) - (x, y) = \\ 2(x, x) + 2(y, y).$$

Proprietatea este caracteristică în sensul următor: dacă o normă definită pe un spațiu verifică regula paralelogramului, atunci ea se obține cu ajutorul unui produs scalar. Există o serie întreagă de condiții necesare și suficiente care să asigure ca o normă să fie generată (ca mai sus) de un produs scalar.

Este verificată și „teorema lui Pitagora": dacă u este ortogonal cu v (vom nota aceasta $u \perp v$), atunci $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (rezultă banal din definiții).

Vom demonstra acum următoarea lemă: dacă F este un subspațiu vectorial închis a lui H și $u \in H$, și dacă $d = \inf_{v \in F} \|(u - v)\|$, atunci există un element $v_0 \in F$, astfel încît $d = \|u - v_0\|$.

Într-adevăr, conform definiției, există un șir $\{v_n\}$, $v_n \in F$, astfel ca $\|u - v_n\| \to d$. Șirul v_n este însă șir Cauchy căci $\|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(v_n + v_m) - u\|^2$. Dar $\|\frac{1}{2}(v_n + v_m) - u\|^2 \geqslant d^2$, deci $\|v_n - v_m\|^2 \leqslant 2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2 - 4d^2$ și, cum $\|v_n - u\|^2 \to d^2$ cînd $n \to \infty$, afirmația rezultă. Prin urmare există un element $v_0 = \lim v_n$ și, cum F este închis, $v_0 \in F$.

De aici vom deduce că dacă F este un subspațiu închis al lui M, diferit de H, atunci există un vector nenul $v \in H$,

ortogonal lui F, adică un vector v cu proprietatea că $(v, u) = 0$ pentru orice $u \in F$.

Pentru demonstrație, fie $v' \in H$, $v' \notin F$. Există atunci un element v_0 din F, la distanță minimă de v'; fie d această distanță și $v = v' - v_0$. Elementul v este vectorul căutat. Din modul în care a fost ales v rezultă că $\|v\| = d$. Trebuie arătat că $v \perp y$ pentru orice $y \in F$, adică $(v, y) = 0$ pentru orice $y \in F$. Pentru aceasta să calculăm produsul scalar

$$(v' - v_0 + \alpha y, v' - v_0 + \alpha y) = \|v' - v_0 + \alpha y\|^2.$$

Cum $-v_0 + \alpha y \in F$, rezultă mai întîi că $\|v' - v_0 + \alpha y\|^2 \geqslant d$.

Avem

$$\|v' - v_0 + \alpha y\|^2 = \|v' - v_0\|^2 + \bar{\alpha}(v' - v_0, y) + \alpha\overline{(v' - v_0, y)} + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geqslant d^2$$

sau

$$\bar{\alpha}(v' - v_0, y) + \alpha\overline{(v' - v_0, y)} + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Numărul α este la dispoziția noastră. Alegem $\alpha = -t(v' - v_0, y)$. Atunci inegalitatea ultimă devine

$$-2t|(v' - v_0, y)|^2 + t^2|(v' - v_0, y)|^2 \|y\|^2 \geqslant 0.$$

Dar această inegalitate nu este posibilă pentru orice t real, decît dacă $(v' - v_0, y) = 0$, adică dacă $(v, y) = 0$, q.e.d.

Vom utiliza acum acest rezultat pentru a obține forma funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Hilbert, rezultat obținut, independent, de F. Riesz și M. Fréchet. Anume, oricărei funcționale liniare și continue $f(x)$ definită pe un spațiu Hilbert H îi corespunde un element $y \in H$, astfel încît $f(x) = (x, y)$. Cu alte cuvinte, putem identifica dualul spațiului Hilbert H cu însuși spațiul. Am văzut că o asemenea identificare se poate face (și demonstrația este simplă) și în cazul spațiilor de dimensiune finită. Acest

rezultat explică de ce spaţiul L^2 este mai simplu, din punct de vedere geometric, decît spaţiul L^1, de pildă.

Demonstraţia este uşoară şi utilizează rezultatul obţinut mai înainte.

În primul rînd, graţie inegalităţii lui Schwartz, orice funcţională $f(x)$ de forma (x, y) este continuă. Reciproc, fie $f(x)$ o funcţională liniară, continuă, oarecare, şi fie $F = \{x \mid f(x) = 0\}$. Evident că F este un subspaţiu vectorial şi că F este închis (de ce?).

Dacă $F = H$, atunci $f(x)$ este identic nulă şi putem scrie $f(x) = (x, 0)$. În cazul contrar, $F \neq H$, există un element $v \in H, v \perp F$. Elementul y căutat va fi de forma $y = \alpha v$, cu $\alpha = \frac{f(v)}{\|v\|^2}$.

Într-adevăr, pentru un vector u oarecare al lui H, $u - \frac{f(u)}{f(v)} v$ va aparţine lui F, deci $(u - \frac{f(u)}{f(v)} v, \alpha v) = 0$, adică $(u, \alpha v) = f(u)$, tocmai ceea ce trebuia arătat (împărţirea prin $f(v)$ este legitimă căci, prin construcţie $v \notin F$).

În definiţia spaţiului Hilbert nu s-a presupus separabilitatea. Să presupunem însă de acum încolo că spaţiile Hilbert pe care le vom considera sînt separabile. Repet, aceasta este o ipoteză suplimentară, care nu rezultă din axiomele spaţiului Hilbert. Fie dat un şir $\{\varphi_n\}$ de vectori din H. Se spune că sistemul $\{\varphi_n\}$ este ortogonal dacă, pentru $m \neq n$, $\varphi_n \perp \varphi_m$. Sistemul este ortonormat dacă, în plus, $\|\varphi_n\| = 1$, pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ Dacă $\{\varphi_n\}$ este un sistem ortogonal, rezultă că orice sistem finit $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_p}$ de elemente ale sale este liniar independent; dacă de pildă $\varphi_{j_p} = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \varphi_{k_j}$ este suficient să facem produsul $(\varphi_{j_p}, \varphi_{j_l}) = \sum \lambda_k(\varphi_{j_k}, \varphi_{j_l}) = 0$, deci, cum $(\varphi_{j_k}, \varphi_{j_l}) = 0$ dacă $j_k \neq j_l$, rezultă că $\lambda_l = 0$ $(l = 1, \ldots, p-1)$, deci nici un φ_{j_p} nu poate fi combinaţie liniară a celorlalţi.

Fie acum f un element arbitrar din H. Se pune problema de a face cît mai mică eroarea $\delta = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|^2$, deci de

Jean Baptiste Fourier
(1768—1830)



a vedea cum pot fi aleși coeficienții c_k, pentru ca δ să fie cît mai mic (sistemul φ_n fiind presupus ortonormat). Calculul ne arată că

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|^2 = (f, f) - \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_j (f, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{N} c_k (\varphi_k, f) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} c_k \bar{c}_k = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k)|^2 + \sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k) - c_k|^2.$$

Este limpede că minimul va fi atins dacă $(f, \varphi_k) - c_k$ va fi nul pentru orice k, deci dacă $(f, \varphi_k) = c_k$, $k = 1, \ldots, N$.

În acest caz, $\delta = \| f \|^2 - \sum |(f, \varphi_k)|^2$ și, cum δ este pătratul unei norme, rezultă că $\| f \|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{N} |(f, \varphi_k)|^2$, inega-

litate numită inegalitatea lui Bessel. Numerele $c_k=(f, \varphi_k)$ se numesc coeficienții Fourier ai elementului f în raport cu sistemul $\{\varphi_k\}$. Făcînd pe N să tindă către infinit se obține $\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant \|f\|^2$.

Să presupunem acum că sistemul $\{\varphi_k\}$ este *complet*, înțelegînd prin aceasta că relațiile $(\varphi_n, f) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, implică în mod necesar $f = 0$. Dacă ținem seama de forma funcționalelor liniare pe spațiul Hilbert (și de teorema lui Hahn-Banach), rezultă imediat că a spune că $\{\varphi_n\}$ este complet echivalează cu a spune că mulțimea combinațiilor liniare de forma $\sum c_k\varphi_k$ este densă în H. În acest caz, inegalitatea lui Bessel se transformă într-o egalitate, așa-numita formulă a lui Parseval. Într-adevăr, din inegalitatea lui Bessel rezultă, f fiind dat, că seria $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ converge (c_k = coeficienții Fourier ai funcției f în raport cu sistemul $\{\varphi_k\}$). Există deci $g \in H$ astfel încît $g = \sum c_k\varphi_k$, i.e. $\left\|g - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\right\| \to 0$, pentru $N \to \infty$. Ei bine, acest g nu este altul decît elementul f de la care s-a plecat; într-adevăr coeficienții săi Fourier (g, φ_j) sînt tocmai c_j, ceea ce se vede imediat

$$|(g, \varphi_j) - c_j| = \left|\left(g - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, \varphi_j\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|g - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\| \|\varphi_j\|, \ (j > n),$$

deci, făcînd pe $n \to \infty$, rezultă $(g, \varphi_j) = c_j$. Dar aceasta înseamnă că $(g - f, \varphi_j) = 0$ pentru orice j, deci (completitudinea sistemului $\{\varphi_n\}$) $g - f = 0$, q.e.d.

Inegalitatea lui Bessel devine

$$\| f - \sum c_k\varphi_k \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} | c_k |^2, \quad \text{dar} \quad (\text{pentru } n \to \infty)$$

$$\| f - \sum c_k\varphi_k \|^2 \to 0, \text{ deci } \| f \|^2 = \sum_{k=1} | c_k |^2.$$

În modul acesta, orice element din H apare ca suma unei serii formate cu ajutorul elementelor sistemului ortonormat complet și această reprezentare este unică. Mai mult, dacă dăm un șir de numere complexe oarecare c_k, supus singurei restricții că $\sum | c_k |^2 < \infty$, există un element g, determinat în mod unic, astfel ca $c_k = (g, \varphi_k)$, $k = 1,2 \ldots$ (dacă $\{\varphi_k\}$ nu este complet, existența rămîne, se pierde însă unicitatea).

Rămîne să arătăm cum se poate construi întotdeauna un șir ortonormal complet (bineînțeles, într-un spațiu Hilbert separabil). Aceasta se face ușor, cu ajutorul așa-numitului procedeu al lui Gram-Schmidt. Alegem mai întîi o mulțime numărabilă de elemente densă în H. Alegem apoi de aici un șir $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, de elemente nenule, cu proprietatea că, pentru fiecare indice n, f_n este liniar independent de $f_1, \ldots, f_{n-1}$, ceea ce este evident posibil, dacă H are dimensiune infinită (dacă dim $H < \infty$, operația se oprește la un $n =$ dim H). Șirul $\{\varphi_n\}$ se definește prin recurență: φ_1 va fi chiar $\frac{f_1}{\| f_1 \|}$. Apoi căutăm un element h_2, ortogonal pe φ_1; h_2 se va căuta sub forma $h_2 = f_2 - \lambda_1^{(2)}\varphi_1$, deci $(h_2, \varphi_1) = (f_2, \varphi_1) - \lambda_1^{(2)}(\varphi_1, \varphi_1) = 0$. Cum $(\varphi_1, \varphi_1) = 1$ prin construcție, luăm $\lambda_1^{(2)} = (f_2, \varphi_1)$; dar f_1 și f_2 sînt liniar independente, deci h_2 nu poate fi zero, prin urmare $\| h_2 \| \neq 0$ și $\varphi_2 = \frac{h_2}{\| h_2 \|}$. Vom căuta apoi h_3, ortogonal pe φ_1 și pe φ_2, sub forma $h_3 = f_3 - \lambda_1^{(3)}\varphi_1 - \lambda_2^{(3)}\varphi_2$; ecuațiile $(h_3, \varphi_1) = 0$ și $(h_3, \varphi_2) = 0$ ne furnizează coeficienții $\lambda_1^{(3)}$ și $\lambda_2^{(3)}$; h_3 nu poate fi nul, căci atunci f_3 ar depinde liniar de φ_1 și φ_2, deci

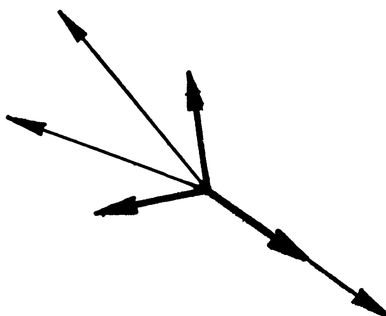


Fig. 10.

şi de f_1 şi f_2, ceea ce contravine ipotezei. Prin urmare elementul φ_3 va fi $\frac{h_3}{\|h_3\|}$ (fig. 10). În general, presupunînd că $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ au fost deja alese, h_{k+1} va fi de forma $h_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1} \lambda_i^{(k+1)} \varphi_i$, ecuaţiile $(h_{k+1}, \varphi_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ determinînd coeficienţii λ_i^{k+1}, iar $\varphi_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{\|h_{k+1}\|}$ ş.a.m.d.

Ne oprim aici cu consideraţiile asupra spaţiilor Hilbert. Cîteva cuvinte despre o altă categorie importantă de spaţii vectoriale, spaţiile Banach, după numele marelui matematician polonez Stefan Banach căruia i se datoresc contribuţii fundamentale în Analiza Funcţională şi care a studiat sistematic aceste spaţii.

Un spaţiu Banach este un spaţiu a cărui topologie este definită de o normă şi care este complet faţă de această normă. În particular, orice spaţiu Hilbert este în mod automat şi un spaţiu Banach, reciproca fiind însă în general falsă.

Spaţiul $C(K)$ al funcţiilor continue pe un compact K, spaţiile $L^p(\Omega)$, sînt tot atîtea exemple importante de spaţii Banach.

Studiul spaţiilor Banach este îngreuiat de faptul că, neavînd un produs scalar, nu avem ortogonalitate. Problema

existenţei unei baze, rezolvabilă imediat în spaţii Hilbert (cum am văzut), este o problemă cu mult mai dificilă, care a suscitat numeroase cercetări, dar încă n-a fost complet rezolvată.

Cîteva aplicaţii

Să vedem acum ce devin rezultatele generale în cazul spaţiului $L^2(\Omega)$. În primul rînd, $L^2(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert. Dualul său, pe baza teoremei lui Riesz-Fréchet, poate fi de asemenea identificat cu $L^2(\Omega)$: orice formă liniară F continuă pe $L^2(\Omega)$ este de forma $F(f) = \int f(x)\bar{g}(x)dx$, unde $g(x) \in L^2(\Omega)$. Inegalitatea lui Schwartz ne arată că o astfel de funcţională este într-adevăr continuă.

În cazul spaţiilor $L^p(\Omega)$ situaţia este desigur mai complicată: ele nu mai sînt spaţii Hilbert, ci sînt spaţii Banach. Să presupunem $1 < p < \infty$. Atunci dualul lui $L^p(\Omega)$ este spaţiul $L^q(\Omega)$, unde p şi q sînt legaţi prin relaţia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cu alte cuvinte, orice formă liniară şi continuă F pe L^p, este de forma $F(f) = \int f(x)\bar{g}(x)dx$, unde $g(x) \in L^q$.

Rezultatul acesta se datoreşte tot lui F. Riesz. Locul inegalităţii lui Schwartz este luat de inegalitatea lui Hölder, amintită mai înainte, dar demonstraţia dualităţii este mai dificilă.

Prin extensie, se foloseşte şi în acest caz cuvîntul ortogonal: $f \in L^p$ şi $g \in L^q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ sînt ortogonale dacă $\int f(x)\bar{g}(x)dx = 0$; dar în acest caz elementele ortogonale sînt situate în spaţii diferite.

Am vorbit despre bază ortonormală: este desigur interesant să indicăm cîteva astfel de baze în spațiul $L^2(\Omega)$. Să presupunem că Ω este intervalul $[-\pi, +\pi]$ și să considerăm doar funcții cu valori reale; sistemul trigonometric 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \ldots$, $\cos nx$, $\sin nx, \ldots$ este ortogonal pe $[-\pi, +\pi]$. Folosind formulele trigonometrice care transformă produsele de sinusuri sau cosinusuri în sume sau diferențe și ținînd seama de periodicitatea acestor funcții, se verifică imediat că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx, \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi.$$

Sistemul *ortonormal* va fi deci $\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$ $\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$

Bineînțeles, aceste formule erau cunoscute de multă vreme (și utilizate adesea de Euler, de pildă). Dar interesante nu sînt atît sistemele ortonormale, cît cele care sînt și *complete*, pentru că ele ne permit să exprimăm orice element din $L^2(-\pi, \pi)$ (în cazul nostru) ca o sumă convergentă (în metrica lui L^2) de elemente ale șirului, în cazul de față ca o sumă de funcții trigonometrice.

În cazul spațiului $L^2(-\pi, \pi)$ și al sistemului trigonometric completitudinea se reduce la următoarea proprietate: dacă $f(x) \in L^2(-\pi, +\pi)$ și dacă $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ și

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad n = 1,2,\ldots \quad \text{(A)}$$

atunci $f(x) = 0$ aproape peste tot.

Intervalul $(-\pi, +\pi)$ fiind mărginit, orice funcție de pătrat integrabil este în mod necesar și integrabilă, și vom demonstra proprietatea enunțată, pentru orice f integrabilă (deci ceva mai general decît ceea ce avem nevoie). Vedeți deci că teoria generală ne furnizează simplu o serie de proprietăți, *dacă sînt îndeplinite anumite condiții*; de exemplu, în cazul nostru, completitudinea. Dar verificarea acestor condiții trebuie făcută și, după cum vă veți convinge, aceasta nu este întotdeauna o treabă ușoară.

Ne vom sprijini pe două fapte:

1° Orice funcție continuă $g(x)$, cu proprietatea că $g(-\pi)= = g(\pi)$, poate fi aproximată uniform pe $(-\pi, +\pi)$ prin polinoame trigonometrice, i.e. prin expresii de forma $a_0 + +\sum_{n=1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. (Această proprietate o vom demonstra mai tîrziu, ca o consecință a teoremei lui Stone-Weierstrass.)

2° Orice funcție în scară poate fi aproximată aproape peste tot prin funcții continue, cu valori egale la capetele intervalului (o mică schiță vă va convinge de adevărul acestei aserțiuni).

Vom arăta că relația

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(A)}$$

este valabilă pentru orice funcție măsurabilă mărginită $g(x)$ ($f(x)$ fiind funcția din enunțul proprietății). Apoi, ținînd seama că dacă relația (A) este valabilă pentru un șir $g_n(x)$ mărginit, ea este valabilă și pentru $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ (utilizăm teorema lui Lebesgue, $|f(x)g_n(x)| \leqslant M|f(x)|$, deci, pe baza observației 1°, relația (A) are loc pentru orice funcție continuă g). În continuare, utilizînd 2°, aproximăm orice funcție în scară printr-un șir mărginit de funcții continue și la limită (din nou aplicăm teorema lui Lebesgue) relația (A) se păstrează; în sfîrșit, orice funcție măsurabilă mărginită fiind limită aproape peste tot de funcții în scară (din definiție), aplicînd din nou teorema lui Lebesgue

obținem relația căutată. Alegem acum $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ dacă $f(x) \neq 0$ și $g(x) = 0$ în cazul contrar. Evident că $g(x)$ este măsurabilă și mărginită; dar $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0 =$ $= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = 0$, deci $f(x) = 0$ aproape peste tot, q.e.d.

Prin urmare am arătat că șirul trigonometric normalizat este un sistem ortonormal complet în $L^2(-\pi, +\pi)$. Deci este valabilă egalitatea lui Parseval și ca atare orice $f \in L^2$ poate fi aproximat în „normă pătratică" prin polinoame trigonometrice.

Dacă se restrînge clasa funcțiilor $f(x)$, de pildă se cere ca ele să fie continue pe porțiuni, sau derivabile etc., se obțin, bineînțeles, convergențe mult mai bune; de exemplu în toate punctele de continuitate etc. Acestea sînt probleme extrem de importante, care au atras atenția matematicienilor de mai bine de un secol; ele țin de ceea ce se numește analiza armonică și, din păcate, am avea nevoie de prea mult spațiu pentru o discuție mai amănunțită pe această temă.

Sistemul trigonometric era de la început ortogonal. Vom da acum un exemplu de ortogonalizare. Vom considera spațiul $L^2(-1, +1)$ și sistemul $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$. Evident că x^n este liniar independent de $1, x, \ldots, x^{n-1}$, o relație de tipul $x^n \equiv \sum \lambda_i x^{n-1}$ cu cel puțin un coeficient $\lambda_i \neq 0$ fiind imposibilă (un polinom de grad n are cel mult n rădăcini reale!).

Fie $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ polinoamele obținute aplicînd procedeul lui Gram-Schmidt șirului $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ pe intervalul $[-1, +1]$. Am spus polinoame, căci dacă examinăm modul în care se face ortogonalizarea vedem că avem de-a face doar cu combinații liniare, efectuate prin recurență, între polinoame.

Cum arată însă aceste polinoame $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$?

Un calcul direct ne arată că $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ etc. În general, $P_n(x)$ este ortogonal tuturor puterilor x^m $(m < n)$, căci orice x^m se poate scrie ca $\sum_{i=1}^{m} \alpha_m^{(i)} P_i(x)$ cu $\alpha_n^{(m)} > 0$, și $P_n(x)$ este ortogonal (prin construcție) tuturor polinoamelor $P_m(x)$, cu $m < n$.

Fie acum $p_n(x)$ un polinom oarecare de grad n; el se va scrie ca o combinație liniară de $\mathrm{P}_m(x)$:

$$p_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \ldots + a_n P_n(x).$$

Să presupunem că $p_n(x)$ este ortogonal tuturor puterilor x^m, cu $m < n$; prin urmare el va fi ortogonal și tuturor $P_m(x)$ pentru $m < n$, deci $p_n(x) = a_n P_n(x)$.

Fie acum $Q_n(x) = (x^2 - 1)^n$, evident un polinom de grad $2\,n$ și fie $p_n(x)$ derivata sa de ordinul n deci $p_n(x)$ va fi un polinom de grad n.

Afirmație: $(p_n(x), x^m) = \int_{-1}^{+1} p_n(x) x^m \, \mathrm{d}x = 0$ pentru $n = 0,1,\ldots, n-1$. Într-adevăr, $Q_n(x)$ și primele sale $n-1$ derivate se anulează în punctele ± 1 deci integrînd repetat prin părți se obține rezultatul căutat. Dar atunci, pe baza observației de mai înainte, $P_n(x) = \frac{1}{a_n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n$. Constantele a_n se calculează destul de simplu (dar nu vom face calculul); ele nu influențează ortogonalitatea, ci doar normele polinoamelor P_n. Polinoamele astfel obținute se numesc polinoamele lui Legendre.

Rămîne de arătat că sistemul $\{P_n(x)\}$ este complet și pentru aceasta este suficient de arătat că dacă $f(x)$ este integrabilă pe $[-1, +1]$ și dacă $\int_{-1}^{+1} f(x) x^n \mathrm{d}x = 0$, $n = 0,1,\ldots,$ atunci $f(x) = 0$ aproape peste tot.

Demonstrația se face cu totul analog ca în cazul sistemului trigonometric, utilizînd însă faptul că orice funcție continuă pe $[-1, +1]$ poate fi aproximată uniform prin

polinoame (teorema lui Weierstrass, caz particular al teoremei lui Stone-Weierstrass, pe care o vom demonstra mai departe).

Concluzie: orice funcţie $f(x) \in L^2(-1, +1)$ se poate reprezenta ca o serie convergentă (în norma spaţiului L^2) de polinoame Legendre, are loc egalitatea lui Parseval etc. În modul acesta polinoamele Legendre (şi la fel se întîmplă cu alte funcţii speciale care intervin adesea în aplicaţii, ca de pildă funcţiile lui Hermite, Laguerre etc.) capătă o interpretare simplă.

Funcții diferențiabile

În acest capitol sînt expuse o serie de chestiuni legate de noțiunea de diferențiabilitate. Spre deosebire de capitolele precedente, în care am întîlnit funcții destul de generale, cum ar fi funcțiile de pătrat integrabil, sau cele integrabile etc., vom avea de-a face acum cu o clasă mai restrînsă, dar absolut fundamentală pentru analiză (și pentru alte ramuri importante ale matematicii moderne: Geometria diferențială și Topologia diferențială): așa-numitele funcții diferențiabile. Vom vorbi de asemenea cîte ceva despre o clasă și mai restrînsă de funcții, funcțiile analitice, care au suscitat interesul tuturor marilor analiști și care constituie cu adevărat inima Analizei. Acest interes pentru funcțiile analitice datează de mult și este în continuare viu; în ceea ce privește funcțiile diferențiabile, el este mult mai recent și se datorește în mare măsură Topologiei diferențiale și așa-numitei teorii a distribuțiilor.

Ne vom abate întrucîtva de la regula urmată destul de consecvent pînă în prezent, aceea de a da demonstrații complete. Mai precis, vom expune o serie de rezultate fără demonstrații, întrucît acestea prezintă adeseori un aspect prea tehnic pentru a putea fi expuse aici. Totuși *enunțurile* lor sînt perfect accesibile și ilustrează unele aspecte adînci ale teoriei; unele din aceste rezultate sînt recente.

Derivată și diferențială

Știți desigur ce este derivata unei funcții, și care este interpretarea sa geometrică. Totuși vom reaminti definiția precisă: o funcție de o variabilă, $f(x)$, este

derivabilă în punctul x_0, dacă limita $\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există, atunci cînd $x \to x_0$ ($x \neq x_0$). Limita aceasta (atunci cînd există) se notează cu $f'(x_0)$ și se numește derivata în punctul x_0 a funcției $f(x)$. Dacă $f(x)$ este derivabilă pe un interval (a, b), atunci funcția $x \to f'(x)$ se numește derivata funcției $f(x)$ și se notează bineînțeles cu $f'(x)$. Dacă la rîndul său $f'(x)$ este derivabilă, se obține o nouă funcție, $f''(x)$, derivata de ordinul al doilea, ș.a.m.d. Desigur, dacă o funcție este derivabilă într-un punct, ea este în mod necesar continuă în acel punct, reciproca fiind vizibil falsă (este suficient să considerăm o linie poligonală!). Din cauza interpretării geometrice a derivatei, matematicienii au crezut multă vreme că dacă o funcție este continuă pe un interval, ea trebuie, în mod necesar, să fie derivabilă măcar în unele puncte ale intervalului (este greu de imaginat o curbă continuă, fără tangentă în nici un punct!). K. Weierstrass a fost primul care a spulberat această iluzie optimistă, dînd un exemplu de funcție continuă pe un interval, care nu este derivabilă în nici un punct al domeniului de definiție. S-au construit de atunci exemple mult mai simple.

Să ne ocupăm acum de noțiunea de diferențială. Fie $f(x)$ o funcție definită pe un interval (a, b) și să presupunem că $f(x)$ este derivabilă în acel interval. Atunci $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ tinde către zero cînd $h \to 0$, deci diferența $f(x+h) - f(x)$ se poate scrie sub forma $f'(x)h + \varepsilon(x, h)h$, unde $\varepsilon(x, h) \to 0$ cînd $h \to 0$. Ei bine, o funcție $f(x)$ este *diferențiabilă* într-un punct x_0, dacă „variația" $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ se poate scrie sub forma $\Delta f = A(x_0)h + \varepsilon(x_0,h)h$, unde coeficientul $A(x_0)$ *nu* depinde de „variația" h a variabilei x și $\varepsilon(x_0, h) \to 0$ cînd $h \to 0$.

Puteți verifica imediat că, în cazul funcțiilor de o singură variabilă, derivabilitatea implică diferențiabilitatea și reciproc.

Cum se va defini diferențiabilitatea în general? Pentru aceasta vom avea nevoie de noțiunea de operator liniar: dacă E și F sînt două spații vectoriale, o funcție $A: E \to F$

se numeşte operator liniar, dacă $A(u+v) = Au + Av$ pentru orice $u, v \in E$ şi dacă $A(\lambda v) = \lambda Av$, ($\lambda$ fiind un scalar). Dacă pe E şi F s-au dat topologii local convexe, putem pune condiţia ca A să fie şi continuu. În particular, dacă $E = R^n$ şi $F = R^m$, atunci orice operator liniar este în mod automat continuu. În spaţii infinit dimensionale bineînţeles că această proprietate nu mai este adevărată.

Mulţimea operatorilor liniari şi continui definiţi pe E, cu valori în F se notează cu $L(E, F)$.

Să presupunem că E şi F sînt spaţii Banach. Atunci condiţia ca un operator liniar A să aparţină lui $L(E, F)$ este ca să existe o constantă $M \neq 0$, astfel încît $\|Au\| \leqslant M \|u\|$ pentru orice $u \in E$. Cel mai mic M cu această proprietate se numeşte norma lui A şi se notează cu $\|A\|$. Puteţi să verificaţi uşor că avem într-adevăr de-a face cu o normă şi că $L(E, F)$ devine astfel un spaţiu Banach.

Fie f o funcţie definită pe o mulţime deschisă U a unui spaţiu Banach E cu valori într-un spaţiu Banach F. Vom spune că f este diferenţiabilă în punctul $x \in E$, dacă există un operator, notat $Df(x)$, $Df(x) \in L(E, F)$, astfel încît $\frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|}{\|h\|} \to 0$ cînd $h \to 0$. Funcţia f este de clasă C^1, dacă este diferenţiabilă în fiecare punct x din U şi dacă funcţia $Df(x)$ definită pe U, cu valori în $L(E, F)$ este continuă. Operatorul $Df(x)$ se numeşte diferenţiala lui f în punctul x. Să examinăm mai atent această definiţie generală: în cazul $E = R^1$, $F = R^1$, $L(E, F) = L(R^1, R^1)$ nu este decît mulţimea funcţiilor liniare de o variabilă cu valori numerice, deci a funcţionalelor liniare, care în acest caz sînt de forma $f(x) = kx$, k fiind o constantă. Definiţia generală coincide cu cea dată iniţial. Să vedem ce devine definiţia în cazul $E = R^n$, $F = R^1$; atunci $L(R^n, R^1)$ este dualul lui R^n, care, după cum ştim, este izomorf cu R^n; orice formă liniară $\Phi(x)$ este de forma $\Phi(x) = \lambda_1\Phi(e_1) + \ldots + \lambda_n\Phi(e_n)$, unde $e_1, \ldots, e_n$ este o bază în R^n, iar $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Diferenţiabilitatea revine deci la următoarele: o funcţie $f(x_1, \ldots, x_n)$ este diferenţiabilă, dacă variaţia sa, $f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$, se poate

scrie sub forma $A_1h_1 + \ldots + A_nh_n + \varepsilon(h_1,\ldots, h_n, x) \| h \|$, cu $\varepsilon (h_1,\ldots, h_n, x) \to 0$, cînd $h \to 0$ (s-a utilizat notația $h = (h_1,\ldots, h_n)$).

Alegerea normei pe R^n n-are nici o importanță, căci toate normele pe R^n sînt echivalente. Coeficienții $A_1,\ldots, A_2$ depind firește de x, dar nu de $h = (h_1,\ldots, h_n)$ (am ales în R^n baza $e_1 = (1,0,\ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0,\ldots, 0)$, $e_n = (0,\ldots,\ldots, 0,1)$, deci vectorul h se va scrie $h = h_1e_1 + \ldots + h_ne_n$, iar $A_k = Df(x)e_k$.

Dacă $E = R^n$ și $F = R^m$, atunci f va fi o funcție ale cărei valori sînt vectori, sau, în mod echivalent, $f(x)$ va fi dată de m funcții numerice: $f = (f_1,\ldots, f_m)$ (și în acest caz vom prefera termenul de *aplicație* în locul celui de *funcție*), spațiul $L(R^n, R^m)$ va fi spațiul matricilor (a_{ij}) cu n coloane și m linii, iar diferențiala (dacă există), va fi dată de o astfel de matrice.

Putem vorbi acum despre *derivatele parțiale* ale unei funcții de mai multe variabile. Dacă f este o funcție definită pe o mulțime deschisă $U \subset R^n$, cu valori în R^1, atunci $D_jf = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+te_j) - f(x)}{t}$ se numește derivata parțială în raport cu variabila x_j (dacă limita de mai sus există); aici $\{e_j\}$ este baza spațiului R^n indicată mai înainte. Definiția ne spune de fapt că f are derivata D_jf (notată deseori și $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$) dacă, neglijînd celelalte variabile, funcția f, considerată ca funcție de o variabilă x_j, este derivabilă.

Bineînțeles, putem vorbi și de derivate succesive (cînd acestea există), dar acum lucrurile se complică puțin: de exemplu, în cazul $n = 2$ (presupunînd că $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ există și sînt derivabile în raport cu ambele variabile avem de considerat derivatele următoare ce se notează cu $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right) =$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} \text{ și } \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right).$$

Leonhard Euler
(1707 — 1783)



Ne putem întreba dacă ordinea de derivare are vreo importanţă: oare $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}$? Deşi egalitatea scrisă nu are loc întotdeauna, ea este verificată în ipoteze rezonabile (de exemplu continuitatea uneia din aceste derivate mixte atrage existenţa celorlalte şi egalitatea dintre ele), ipoteze pe care le vom presupune întotdeauna verificate în cele ce urmează.

Care este legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitate parţială?

Vom arăta că diferenţiabilitatea atrage existenţa derivatelor parţiale de primul ordin. Reciproca însă (spre deosebire de cazul funcţiilor de o singură variabilă) nu are loc.

Fie deci f diferențiabilă. Atunci $\frac{f(x+h)-f(x)-Df(x)h}{h} \to 0$.

Să alegem pe h de forma $h = te_j$, cu t număr real tinzînd către zero. Dar atunci

$$\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} - \frac{Df(x)te_j}{t} \to 0. \text{ Dar } \frac{(Df(x))te_j}{t} = Df(x)\,e_j,$$

deci $\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$ are o limită cînd $t \to 0$ și deci derivatele parțiale D_jf există. Cum orice vector h se scrie $h = h_1e_1 + \ldots + h_ne_n$, atunci $Df(x)h = h_1Df(x)e_1 + \ldots + h_nDf(x)e_n$, deci dacă h este de forma $(0,\ldots, h_j,\ldots, 0)$, rezultă că $A_j(x)$ este tocmai $Df(x)e_j$ care este, în același timp, derivata $D_jf(x)$.

Regăsim astfel formula obișnuită a diferențialei

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n,$$

așa cum este scrisă de obicei în cărțile de analiză; această formulă are un caracter pur simbolic: ea nu spune decît că variația funcției f, atunci cînd variațiile variabilelor $x_1,\ldots,$ $\ldots, x_n$ sînt suficient de mici, este aproximată de o combinație liniară a acestor variații, coeficienții combinației fiind tocmai derivatele parțiale în punctul considerat.

Se poate arăta ușor că dacă derivatele parțiale D_jf sînt continue într-un punct, atunci f este diferențiabilă în acel punct (ne referim la funcții definite în R^n, cu valori în R^m). Trebuie reținut însă că existența derivatelor parțiale nu asigură automat diferențiabilitatea funcției.

Un rezultat extrem de important este așa-numita formulă a lui Taylor. Un caz particular vă este bine cunoscut. Este vorba de formula lui Lagrange, sau formula creșterilor finite.

Să considerăm cazul cel mai simplu, al unei funcții de o variabilă cu valori reale $f(x)$, funcția $f(x)$ avînd derivate continue pînă la ordinul p. Formula lui Taylor

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1!}f'(x) + \frac{y^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{y^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(x) +$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x+ty)y^p dt,$$

(unde se presupune că segmentul $x + ty$ aparține domeniului de definiție al funcției $f(x)$) ne permite să exprimăm valoarea $f(x+y)$ cu ajutorul valorilor derivatelor pînă la ordinul p într-un punct fixat x al funcției $f(x)$.

Termenul $\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x+ty)y^p dt$ se numește restul formulei lui Taylor și se poate exprima și sub alte forme.

Una din acestea, restul în forma lui Lagrange, pe care o vom utiliza în ultimul paragraf al capitolului, este dată de formula

$$R_p = \frac{y^p}{p!} f^{(p)}(x + \xi y),$$

unde ξ este un anumit număr aparținînd intervalului $[0,1]$.

Folosind formula mediei pentru integrale, din

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{(p-1)!} f^{(p)} (x+ty)y^p dt$$

se obține forma restului datorită lui Cauchy

$$R_p = \frac{(1-\xi)^p}{(p-1)!} y^p f^{(p)}(x+\xi y),$$

cu $\xi \in [0,1]$. Atragem atenția asupra faptului că cei doi ξ care apar în resturile lui Lagrange și Cauchy sînt diferiți. Am folosit aceeași notație doar pentru a nu complica scrierea.

Demonstrația o vom face prin recurență.

Fie $\Phi(t)$ funcția definită astfel: $\Phi(t)=f'(x+ty)y$; atunci este clar că $\int_0^1 \Phi(t)\mathrm{d}t=f(x+y)-f(x)$. Dar $\int_0^1 \Phi(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f'(x+ty)y\mathrm{d}t$ se poate integra prin părți; integrarea prin părți se face astfel încît să putem obține primul termen al dezvoltării. Deci, în formula $\int_0^1 u\mathrm{d}v=uv\Big|_0^1-\int_0^1 v\mathrm{d}u$, alegem $\mathrm{d}v=\mathrm{d}t$ și $u=f'(x+ty)y$; funcția v o vom scrie sub forma $v=-(1-t)$ iar $\mathrm{d}u$ va fi $f''(x+ty)y^2$. Atunci

$$\int_0^1 f'(x+ty)y\mathrm{d}t=-f'(x+ty)y(1-t)\Big|_0^1+$$

$$+\int_0^1 f''(x+ty)y^2(1-t)\mathrm{d}t=f'(x)y+\int_0^1 f''(x+ty)y^2(1-t)\mathrm{d}t.$$

Putem proceda la fel în continuare. După $(p-2)$ etape găsim că

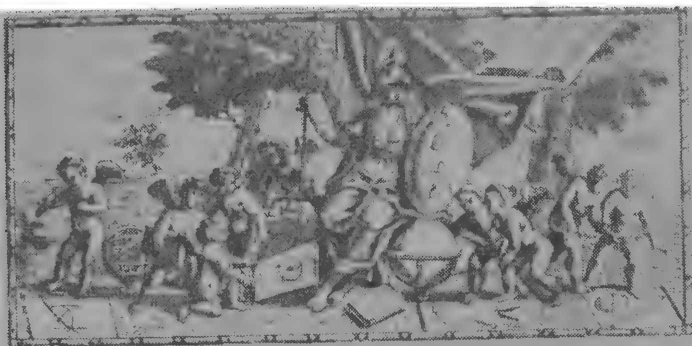
$$f(x+y)=f(x)+\frac{y}{1!}f'(x)+\frac{y^2}{2!}f''(x)+\dots+$$

$$+\frac{y^{p-2}}{(p-2)!}f^{(p-2)}(x)+\int_0^1\frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!}f^{p-1}(x+ty)y^{p-1}\mathrm{d}t.$$

Iarăși integrăm prin părți ultima integrală notînd $f^{(p-1)}(x+ty)y^{p-1}=u$ și $\frac{(1-t)^{p-2}}{(p-2)!}\mathrm{d}t=\mathrm{d}v$ (v va fi $-\frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}$, iar $\mathrm{d}u$ va fi $f^p(x+ty)y^p$ și obținem formula căutată

$$f(x+y)=f(x)+\frac{y}{1!}f'(x)+\frac{y^2}{2!}f''(x)+\dots+$$

$$+\frac{y^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(x)+\int_0^1\frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(x+ty)y^p\mathrm{d}t.$$



Prima pagină a tratatului de Analiză a lui I. Newton

Pentru a evalua restul, să utilizăm continuitatea lui $f^{(p)}$: diferența $f^{(p)}(x + ty) - f^{(p)}(x)$ tinde către zero cînd $y \to 0$, de unde rezultă că formula lui Taylor se poate scrie și sub forma

$$f(x+y) = f(x) + \frac{yf'(x)}{1!} + \ldots + \frac{y^p f^{(p)}(x)}{p!} + \psi(y),$$

unde $\frac{\psi(y)}{y^p} \to 0$ cînd $y \to 0$. În acest fel, cu cît regularitatea funcției f este mai mare, cu atît restul obținut tinde mai repede către zero, deci aproximația este mai bună. Dar cine este funcția care aproximează ? Nu este altceva decît un polinom în y. Dacă $f(x)$ era inițial un polinom, se verifică imediat că restul $\psi(y)$ este identic nul.

În cazul funcțiilor de mai multe variabile se obține o formulă analogă, ba chiar se poate obține o formulă Taylor pentru funcții definite și cu valori în spații Banach.

Dacă funcţia $f(x) = f(x_1,..., x_n)$ este definită în R^n şi cu valori numerice, şi dacă are toate derivatele sale pînă la ordinul p continue (adică $f \in C^p$), atunci printr-un artificiu simplu se obţine formula lui Taylor. Se consideră funcţia de o variabilă

$$g(t) = f(x+ty) = f(x_1+ty_1,..., x_n+ty_n),$$

funcţie care este derivabilă pînă la ordinul p şi căreia, prin urmare, i se poate aplica formula lui Taylor. Cum $f(x+y) - f(x) = g(1) - g(0)$, atunci, exprimînd diferenţa $g(1) - g(0)$ cu ajutorul formulei lui Taylor, se obţine formula căutată. Lăsăm pe seama cititorului explicitarea calculelor.

În cazul general al unei funcţii f: $E \to F$ (unde E şi F sînt spaţii Banach) se definesc mai întîi, prin recurenţă, diferenţialele de ordin superior, $D^k f = D(D^{k-1}f)$, diferenţiala de ordinul k a funcţiei f (dacă există) fiind o funcţie cu valori în spaţiul operatorilor k — liniari * simetrici şi continui, $L_s^k\ (E, F)$. Notînd cu $D^k f(x)h$ valoarea aplicaţiei $D^k f(x)$ în punctul $(h,..., h) \in \underbrace{E \times ... \times E}_{k \text{ factori}}$, formula lui Taylor se scrie

$$f(x+y) = f(x) + \frac{Df(x)y}{1!} + ... + \frac{D^{p-1}f(x)y^{p-1}}{(p-1)!} + \psi(x, y), \text{ unde}$$

$\frac{\psi(x, y)}{\|y\|^p} \to 0$ cînd $y \to 0$, dacă f este diferenţiabilă pînă la ordinul p. Demonstraţia este asemănătoare celei din cazul finit dimensional, utilizînd însă noţiunea de integrală a unei funcţii cu valori într-un spaţiu Banach.

---

* Un operator k-liniar este un operator definit pe $\underbrace{E \times ... \times E}_{k \text{ factori}}$ cu valori în F, liniar în fiecare variabilă. Simetria înseamnă că $A(x_1,..., x_k) = A(x_{i_1},..., x_{i_k})$, pentru orice permutare $i_1,..., i_k$ a indicilor $1,..., k$.

Funcții diferențiabile

Vom părăsi generalitatea extremă a funcțiilor definite și cu valori în spații Banach, trecînd la chestiuni mai concrete legate de funcțiile infinit diferențiabile, definite pe mulțimi din R^n, cu valori numerice. Dacă U este un deschis din R^n, vom nota cu $C^\infty(U)$ clasa funcțiilor indefinit diferențiabile pe U. De acum încolo prin diferențiabil vom înțelege „de clasă C^∞". Pentru a simplifica scrierea se va folosi notația următoare:

$$D_j f = \frac{\delta f}{\delta x_j}\,; \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}\,.$$

O noțiune importantă este aceea de suport al unei funcții: o mulțime K este suportul unei funcții $f(x)$, dacă K este complementara celei mai mari mulțimi deschise pe care $f(x)$ este identic nulă. Bineînțeles în suportul unei funcții f pot exista puncte în care $f(x) = 0$, dar nu pot exista vecinătăți în care $f(x)$ să fie identic zero. Suportul se poate defini și ca aderența mulțimii $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Prima problemă care ne interesează este aceea de a ști dacă există funcții infinit derivabile cu suport compact (existența funcțiilor continue, sau de clasă C^1, cu suport compact rezultă imediat).

Răspunsul este afirmativ; pentru aceasta este suficient să dăm un exemplu de astfel de funcție. Fie deci $\varphi(x)$ funcția egală cu $e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ cînd $|x| < 1$ și egală cu zero pentru $|x| \geqslant 1$. Desigur funcția aceasta este infinit derivabilă în punctele $|x| < 1$ și $|x| > 1$. Dar și în punctele x cu $|x| = 1$ funcția este infinit derivabilă, derivatele sale succesive fiind nule, după cum vă puteți imediat convinge ($\lim\limits_{t \to 0} t^{-k} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$ pentru orice k!). Suportul lui

$\varphi(x)$ va fi segmentul $[-1, +1]$. Dacă considerăm funcția $\varphi_1(x) = e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}$, (unde $x \in R^n$) pentru $\|x\| < 1$ și egală cu zero pentru $\|x\| \geqslant 1$, obținem o funcție infinit derivabilă (pe scurt, de clasă C^∞) avînd drept suport bila închisă $\|x\| \leqslant 1$.

Utilizînd funcția $\varphi_1(x)$, de mai sus, putem construi o funcție avînd drept suport bila $\|x\| \leqslant \varepsilon$, ε fiind un număr pozitiv arbitrar. N-avem decît să considerăm funcția $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}}$ pentru $\|x\| < \varepsilon$ și egală cu zero pentru $\|x\| \geqslant \varepsilon$. Avem deci la îndemînă funcții de clasă C^∞ cu suport oricît de mic.

Fie acum K un compact oarecare și U o mulțime deschisă, $K \subset U$. Vom construi o funcție f de clasă C^∞, astfel ca:

1° pentru orice $x \in R^n$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,
2° $f(x) = 1$ pentru orice $x \in K$,
3° $f(x) = 0$ pe $R^n - U$.

Pentru aceasta să considerăm mai întîi cazul particular următor: K este bila închisă $|x| \leqslant r$ și U este bila $|x| < R$, unde $0 < r < R$. Atunci funcția $\psi(t) = e^{-\frac{1}{t-r} - \frac{1}{R-t}}$ pentru $0 < t < R$ și $\psi(t) = 0$ în cazul contrar, este de clasă C^∞ (același argument ca mai înainte).

Dar atunci funcția

$$\psi_1(x) = \frac{\int_x^R \psi(t)dt}{\int_r^R \psi(t)dt}$$

va fi de asemenea infinit derivabilă. În plus, deoarece $\int \psi(t)dt = 0$ pentru $t < r$, atunci $\int_x^R \psi(t)dt = \int_r^R \psi(t)dt$ pentru $x < r$, deci $\psi_1(x) \equiv 1$ dacă $x < r$, şi $\int_x^R \psi(t)dt = 0$ dacă $x > R$, prin urmare $\psi_1(x) \equiv 0$ pentru $x >$ R. În consecinţă, funcţia $f(x) = \psi_1(\| x \|) = \psi_1((x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2})$ va fi funcţia căutată.

O translaţie convenabilă ne oferă, bineînţeles, funcţii f cu aceleaşi proprietăţi relative la bile centrate într-un punct oarecare x_0.

La cazul general se ajunge acum imediat. Mulţimea K fiind compactă, putem alege un număr finit de perechi de bile concentrice $K_i \subset U_i$, astfel ca $\bigcup K_i \supset K$ şi $U_i \subset U$; dacă $f_i(x)$ sînt funcţiile corespunzătoare perechilor (K_i, U_i), funcţia căutată va fi $f(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - f_i(x))$, ceea ce se verifică numaidecît.

Vom utiliza acest rezultat pentru a obţine ceea ce se numeşte o partiţie a unităţii (de clasă C^∞). Fie $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ o acoperire numărabilă prin mulţimi deschise a spaţiului R^n). Se presupune că:

1° mulţimile U_k sînt mărginite şi

2° acoperirea este local finită (aceasta înseamnă că orice compact din R^n intersectează doar un număr finit de mulţimi U_k).

Atunci poate fi demonstrată următoarea teoremă:

există o mulţime $\{e_k(x)\}$ de funcţii infinit derivabile, astfel încît:

a) $0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1$ pentru orice $k = 1,2,\ldots$

b) suportul lui e_k este inclus în U_k şi

c) $\sum e_k(x) = 1$ pentru orice $x \in R^n$.

Se spune că familia $\{e_k\}$ cu aceste proprietăţi, formează o partiţie a unităţii, subordonată acoperirii $\{U_k\}$. Demonstraţia se face astfel: se construieşte mai întîi o altă aco-

perire deschisă şi local finită a lui R^n, $\{V_j\}$ cu proprietatea că $\overline{V}_j \subset U_j$ $(j = 1,2,...)$. Să presupunem construită această acoperire. Condiţia $\overline{V}_j \subset U_j$, cuplată cu mărginirea lui U_j, arată că $\overline{V}_j$ este compactă; deci (pe baza celor arătate mai sus) există o funcţie f_j identic egală cu 1 pe V_j, nulă pe complementara lui U_j, de clasă C^∞ şi astfel ca $0 \leqslant f_j(x) \leqslant 1$ pentru orice $x \in R^n$. Fie $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$; cum fiecare $x \in R^n$ aparţine cel puţin unui V_j, rezultă că $f(x) \geqslant 1$; dar, cum fiecare x aparţine unui număr finit de V_j, suma care îl defineşte pe $f(x)$ are doar un număr finit de termeni, număr constant într-o vecinătate suficient de mică a punctului x considerat, deci $f(x)$ este şi ea de clasă C^∞. Dacă notăm acum $e_k(x) = \frac{f_k(x)}{f(x)}$, este clar că e_k verifică toate condiţiile teoremei. Rămîne de arătat construcţia acoperirii $\{V_j\}$. Dacă $F_1 = C\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} U_k\right)$, atunci F_1 este închisă şi în mod necesar $F_1 \subset U_1$. Alegem drept V_1 un deschis ce conţine pe F_1 şi a cărui aderenţă este inclusă în U_1. Sistemul $\{V_1, U_2, U_3,...\}$ formează o acoperire a lui R^n (evident local finită). Luăm complementara mulţimii deschise $V_1 \cup U_3 \cup \cup U_4 \cup ,...$, fie ea F_2. Mulţimea F_2 fiind închisă şi conţinută în U_2, alegem V_2 astfel ca $F_1 \subset V_2 \subset \overline{V}_2 \subset U_2$. Sistemul $\{V_1, V_2, U_3,..., U_n...\}$ formează o acoperire a lui R^n. Repetînd procedeul, găsim acoperirea $V_1, V_2,...$ cu proprietăţile căutate.

În modul acesta am demonstrat existenţa unei partiţii a unităţii de clasă C^∞, subordonată unei acoperiri local finite. Dacă se renunţă la condiţia de infinită derivabilitate se poate arăta existenţa unei partiţii a unităţii (cu funcţii continue) pe spaţii topologice mult mai generale decît R^n, utilizînd acelaşi raţionament de mai înainte şi un rezultat al lui P. Urisohn care afirmă existenţa (în condiţii foarte generale) a unei funcţii φ continue, egală cu 1 pe un compact K oarecare, nulă în afara unei vecinătăţi

arbitrare date a lui K, şi astfel încît $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ pe întreg spaţiul.

De asemenea se poate demonstra existenţa unor partiţii ale unităţii posedînd proprietăţi suplimentare, de pildă cerînd funcţiilor $\{e_k\}$ să aparţină anumitor clase de funcţii infinit derivabile: necesitatea considerării unor astfel de partiţii apare deseori în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Importanţa existenţei partiţiilor unităţii constă în faptul că este uneori singurul mijloc care permite trecerea de la proprietăţi locale la proprietăţi globale.

Vom considera acum o operaţie definită pentru perechi de funcţii (vom vedea imediat cîteva din cazurile în care această operaţie are sens), care este deosebit de utilă în numeroase aplicaţii. Vom indica şi noi unele din aplicaţiile sale tipice.

Este vorba de operaţia de *convoluţie* a două funcţii. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii. Convoluţia se defineşte astfel: $(f*g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)dy$. Bineînţeles, convoluţia nu este definită pentru orice pereche de funcţii.

Un caz simplu în care $f*g$ are sens este acela cînd f este integrabilă, iar g este continuă şi cu suport compact. Desigur că putem interverti rolurile lui f şi g, căci $f*g = g*f$ de fiecare dată cînd unul din membrii egalităţii are sens. Într-adevăr $\int f(x-y)g(y)dy = \int f(t)\, g(x-t)dt$ (am făcut schimbarea de variabilă $x-y = t$ şi am utilizat faptul că $-\int_{\infty}^{-\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt$. În cazul în care funcţiile considerate sînt definite pe R^n, integrala care defineşte convoluţia este extinsă la întreg spaţiul R^n deci va fi o integrală multiplă).

Vom examina două situaţii în care convoluţia are sens.

1° Dacă $f, g \in L^1(R^n)$, atunci $f*g \in L^1(R^n)$ şi $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Demonstrație. Fie $h(x) = \int f(x - y)g(y)\mathrm{d}y$. Trebuie arătat că $\int |h(x)| \, \mathrm{d}x < \left(\int |f(x)| \, \mathrm{d}x\right) \left(\int |g(x)| \, \mathrm{d}x\right)$. Să admitem (deși faptul nu este evident, vom omite demonstrația) că funcția $(x, y) \to f(x - y)$ este măsurabilă în variabilele (x, y). Atunci și funcția $|f(x - y)| \, |g(y)|$ se va bucura de aceeași proprietate. Dacă stabilim că $\iint |f(x - y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$, atunci în virtutea teoremei lui Fubini, pentru aproape orice x funcția de y, $|f(x - y)| \, |g(y)|$, este integrabilă și $\iint |f(x-y)| \, \mathrm{d}y) \, \mathrm{d}x$ este egală cu $\int |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Să presupunem că am demonstrat aceasta. Atunci

$$|h(x)| \leqslant \int |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}y,$$

unde membrul al doilea este finit pentru aproape orice x, și $\|h\|_1 = \int |h(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \int \left(\int |f(x - y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x =$

$$= \iint |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Dar teorema lui Fubini ne asigură că, pentru ca să existe $\iint |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, este necesar și suficient ca să existe $\int \left(\int |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$ și atunci avem egalitatea între cele două integrale.

Este însă evident că

$$\int \left(\int |f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int \left(|g(y)| \int |f(x-y)| \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

Apoi $\int |f(x-y)|\,dx = \int |f(x)|\,dx$ (invarianța la translații a măsurii Lebesgue), deci în definitiv

$$\int \left(\int |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\right)dy = \int |g(y)|\,dy \int |f(x)|\,dx = \\ = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty$$

din ipoteză. Cu alte cuvinte,

$$\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1\ \|g\|_1.$$

2° Un raționament analog ne arată că dacă $f \in L^1$ și $g \in L^p$, atunci $h = f * g$ aparține lui L^p și că $\|h\|_p \leqslant \leqslant \|f\|_1\ \|g\|_p$.

Vom demonstra acum unele proprietăți de aproximare care vor pune în evidență utilitatea convoluției.

Fie φ o funcție infinit derivabilă, nenegativă, cu suportul conținut în bila $\{x \mid |x| \leqslant 1\}$ și astfel încît $\int \varphi(x)\,dx = 1$. După cum am văzut (la începutul paragrafului), există astfel de funcții. Fie $\varphi_\varepsilon(x)$ funcția $\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar.

Atunci, pentru $\varepsilon \to 0$,

1° dacă $u(x)$ este continuă, $u_\varepsilon(x) = u * \varphi_\varepsilon(x)$ converge uniform, pe orice compact, către $u(x)$;

2° dacă $u \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $\|u_\varepsilon - u\|\,p \to 0$;

3° dacă μ este o măsură Radon, μ este unic determinată de restricția sa la spațiul C_0^∞ al funcțiilor infinit derivabile cu suport compact.

Vom da demonstrațiile numai pentru cazul unei singure variabile (pentru a nu fi nevoiți să apelăm la schimbări de variabilă în integrale multiple), dar ele sînt analoge și pentru cazul general.

Mai întîi

$$u_\varepsilon(x) = \int u(x-y)\ \varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = \int u(y)\ \varphi_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int u(x-\varepsilon t)\ \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Cum integrarea se face doar pe suportul funcției φ, ea este întotdeauna posibilă. Este ușor de văzut că dacă $u(x)$ este cu suport compact, atunci și $u_\varepsilon(x)$ este de asemenea cu suport compact (suportul va fi puțin mai mare). În sfîrșit, să arătăm că $u_\varepsilon(x)$ este infinit derivabilă. Desigur este suficient să remarcăm că $u_\varepsilon(x)$ este derivabilă o dată și că același raționament se poate aplica apoi lui $u'(x)$, apoi lui $u''(x)$ ș.a.m.d.

Fie deci $\dfrac{u_\varepsilon(x+h)-u_\varepsilon(x)}{h} = \displaystyle\int u(y)\left[\frac{\varphi_\varepsilon(x+h-y)-\varphi_\varepsilon(x-y)}{h}\right]\mathrm{d}y.$

Cînd $h \to 0$, $\dfrac{\varphi_\varepsilon(x+h-y)-\varphi_\varepsilon(x-y)}{h}$ tinde uniform către

$\varphi_\varepsilon'(x)$, deci $\displaystyle\int u(y)\left[\frac{\varphi_\varepsilon(x+h-y)-\varphi_\varepsilon(x-y)}{h}\right]\mathrm{d}y$ va tinde

către $\displaystyle\int u(y)\ \varphi'(x-y)\mathrm{d}y$ și deci $\dfrac{u_\varepsilon(x+h)-u_\varepsilon(x)}{h}$ va avea o

limită, q.e.d.

Este limpede că raționamentul poate fi repetat pentru $u_\varepsilon'(x)$, $u_\varepsilon''(x)$ ș.a.m.d..

În ceea ce privește proprietatea de aproximare, trebuie evaluată diferența $u(x) - u_\varepsilon(x)$.

$$u(x) - u_\varepsilon(x) = \int [u(x) - u(x-\varepsilon y)]\ \varphi(y)\mathrm{d}y$$

(aici am utilizat faptul că $\displaystyle\int \varphi(y)\mathrm{d}y = 1$). Însă, pe orice compact, $u(x)$ este uniform continuă; variabila y se mișcă doar în suportul lui φ, deci $|\ y\ | \leqslant 1$; este deci evident că

$|u(x) - u(x - \varepsilon y)|$ poate fi făcut oricît de mic, dacă ε este suficient de mic, ceea ce încheie demonstrația punctului 1°. Avem deci o teoremă de aproximare a funcțiilor continue prin funcții de clasă C^∞. Vom vedea mai tîrziu că de fapt se poate demonstra un rezultat mult mai tare: orice funcție continuă pe un compact poate fi aproximată prin *polinoame!*

Punctul 2° îl vom demonstra astfel: fie $u \in L^p$; există, $\eta > 0$ fiind dat, o funcție continuă v cu suport compact, astfel încît $\|u - v\|_p < \eta$. Să evaluăm diferența $\|u - u_\varepsilon\|_p$. Avem $u - u_\varepsilon = u - v + v - v_\varepsilon + v_\varepsilon - u_\varepsilon$, unde $v_\varepsilon = v * \varphi_\varepsilon$, deci $\|u - u_\varepsilon\|_p \leqslant \|u - v\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p + \|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_p$. Funcția v fiind continuă, pe orice compact v_ε va aproxima uniform pe v, deci, pentru ε suficient de mic, vom avea și $\|v - v_\varepsilon\|_p < \eta$. În sfîrșit, $v_\varepsilon - u_\varepsilon = (v - u) * \varphi_\varepsilon$. Aplicînd rezultatul indicat mai înainte

$(f \in L^1,\ g \in L^p \Rightarrow f * g \in L^p,\ \|f\|_1 \|g\|_p \geqslant \|f * g\|_p)$,

avem

$\|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_p \leqslant \|v - u\|_p \|\varphi_\varepsilon\|_1$. Cum $\|\varphi_\varepsilon\|_1 = 1$,

atunci

$\|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_p < \eta$, deci $\|u - u_\varepsilon\| < 3\eta$, q.e.d.

Punctul 3° este o consecință imediată a punctului 1°.

Spațiul funcțiilor de k ori diferențiabile, $C^k(R^n)$ sau spațiul $C^\infty(R^n)$, poate fi înzestrat în mod natural cu o topologie local convexă (același lucru se poate afirma despre spațiile $C^k(\Omega)$ și $C^\infty(\Omega)$, Ω fiind un deschis oarecare din R^n). Se consideră un șir de compacte K_l, astfel încît $K_l \subset \operatorname{int} K_{l+1}$, $\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = R^n$ și seminormele $\|f\|_{l,k} =$

$= \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in h_l} |D^\alpha f(x)|$. Topologia lui $C^k(R^n)$ va fi dată de

șirul seminormelor $\|f\|_{k,l}$, $l = 1,2,\dots$, iar cea a lui $C^\infty(R^n)$ de seminormele $\|f\|_{k,l}$ $l = 1,2,\dots$ și $k = 1,2\dots$ Vedeți, acestea nu mai sînt spații normate, ci spații local con-

vexe destul de generale. Insă, pe aceste spații, se pot introduce și metrici, anume pe $C^k(R^n)$ metrica este dată de

$d(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|f-g\|_{n,k}}{1+\|f-g\|_{n,k}}$, iar pe $C^\infty(R^n)$ se consideră metrica

$$d_1(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|f-g\|_{n,n}}{1+\|f-g\|_{n,n}}$$

și se verifică ușor că aceste metrici induc pe $C^k(R^n)$, respectiv pe $C^\infty(R^n)$ topologiile inițiale.

Vom arăta acum că aceste spații sînt complete, sau, cu alte cuvinte, că dacă $\{f_n\}$ este un șir Cauchy față de d, respectiv față de d_1, atunci există o funcție f_0, $f_0 \in C^k$ (respectiv $f_0 \in C^\infty$), astfel ca $d(f_n, f_0) \to 0$ (respectiv $d_1(f_n, f_0) \to 0$).

Desigur, afirmația este dovedită dacă arătăm că există o funcție f, astfel încît, pentru orice seminormă $\|\cdot\|_{l,k}$ (respectiv $\|\cdot\|_{l,l}$), $\|f-f_n\|_{l,k} \to 0$ cînd $n \to \infty$. Dar din faptul că șirul $\{f_n\}$ este șir Cauchy față de seminormele considerate, rezultă că șirul $D^\alpha f_n$ este șir Cauchy pe orice compact față de norma $\|f\|_0 = \sup |f|$, deci, după cum știm, pentru orice multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ cu $|\alpha| \leqslant k$, respectiv pentru orice α, există o funcție *continuă* f_α, astfel că $D^\alpha f_n$ converge uniform, pe orice compact, către f_α. Demonstrația va fi terminată dacă scriem că, pentru orice indice β, cu $|\beta| = 1$, $D^\beta f_\alpha = f_{\alpha+\beta}$ în R^n (în cazul spațiului $C^n(R^n)$, trebuie presupus că $|\alpha+\beta| \leqslant k$).

Aceasta rezultă însă din formula creșterilor finite, caz particular al formulei lui Taylor. Să alegem un punct arbitrar din R^n, fie el a. Pentru x suficient de aproape de a

$$D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_n(a) = \sum_{|\beta|=1} D^{\alpha+\beta} f_n(\xi_n)(x-a)^\beta,$$

ξ_n fiind un punct al segmentului $[a, x]$. Șirul $\{\xi_n\}$ fiind

mărginit, extragem un subşir convergent ξ_{n_k} şi fie $\xi = = \lim \xi_{n_k}$. Dacă în formula

$D^\alpha f_{n_k}(x) - D^\alpha f_{n_k}(a) = \sum\limits_{|\beta|=0} D^{\alpha+\beta} f_{n_k}(\xi_{n_k}) (x-a)^\beta$ facem pe

$n_k \to \infty$, atunci obţinem

$$f_\alpha(x) - f_\alpha(a) = \sum_{|\beta|=1} f_{\alpha+\beta}(\xi)(x-a)^\beta.$$

Dar cum $f_{\alpha+\beta}(\xi)$ este continuă, putem scrie în continuare

$$f_\alpha(x) - f_\alpha(a) = \sum_{|\beta|=1} f_{\alpha+\beta}(a)(x-a) + 0(x-a),$$

unde $\frac{0(x-a)}{|x-a|} \to 0$ cînd $x \to 0$, ceea ce ne arată că f_α este

diferenţiabilă în punctul a şi că $D^\beta f_\alpha(a) = f_{\alpha+\beta}(a)$. În definitiv, rezultă că funcţia f_0, limita uniformă a şirului f_n pe orice compact, este de clasa C^k, respectiv C^∞, de unde concluzia căutată. Vom folosi aceasta pentru a demonstra un rezultat clasic al lui E. Borel.

Mai întîi cîteva notaţii şi definiţii. Fie f o funcţie de clasă C^∞ în vecinătatea originii; vom nota cu $T(f)$ dezvoltarea Taylor a lui f, adică expresia $\sum\limits_{|\alpha|<\infty} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$ şi cu

$T^m(f)$ polinomul $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$.

Desigur s-ar putea foarte bine ca seria $\sum \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$ să

nu fie convergentă în nici un punct. De fapt, $T(f)$ nu este

decît un şir de numere $\left\{\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}\right\}$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, unde

α_i parcurg toţi întregii nenegativi. Se spune că avem de-a

face cu o serie formală. Mulțimea seriilor formale (în n variabile) se notează cu $C\ [[x_1,\ldots, x_n]]$ și intervine adesea în matematică.

O funcție f se spune m-plată pe o mulțime închisă E, dacă $D^\alpha f(x) = 0$ pentru orice $x \in E$ și $|\alpha| \leqslant m$. Dacă f (presupusă de clasă C^∞) este m-plată pe E pentru orice m, atunci se spune că f este *plată* pe E.

Teorema lui Borel se enunță astfel: pentru orice familie de constante $\{C_\alpha\}$ există o funcție $f \in C^\infty(R^n)$, astfel ca $\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} = C_\alpha$, sau, altfel spus pentru orice serie formală $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ există o funcție $f \in C^\infty\ (R^n)$, astfel încît $T(f) = \sum \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$ să fie tocmai $\sum c_\alpha x^\alpha$. Teorema lui Borel afirmă deci că aplicația* $f \to T(f) = \sum \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}\ x^\alpha$ de la $C^\infty(R^n)$ la $C[[x_1,\ldots, x_n]]$ este surjectivă.

Demonstrația se sprijină pe lema următoare: dacă $f \in C^\infty(R^n)$ este m-plată în origine, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o funcție g, $g \in C^\infty$, identic nulă într-o vecinătate a originii și astfel încît $\sup_{x \in R^n} |D^\alpha(f-g)(x)| < \varepsilon$ pentru $|\alpha| \leqslant m$ (evident, g este plată în origine!).

Să presupunem lema demonstrată. Fie $\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha = P_m(x)$. Atunci $P_{m+1}(x) - P_m(x)$ este m-plată în origine, deci există $g_m \in C^\infty$, plată în origine, astfel încît

$$\| P_{m+1} - P_m - g_m \|_{m,\, m} < \frac{1}{2^m}.$$

---

* Se spune că o aplicație $f\colon A \to B$ este surjectivă, sau că este o surjecție, dacă orice $y \in B$ este de forma $f(x)$, cu $x \in A$; aplicația se numește injectivă dacă, pentru orice pereche x_1, x_2 de elemente distincte din A, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Fie acum $f = P_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (P_{m+1} - P_m - g_m)$. Din construcție rezultă că pentru orice seminormă care definește topologia lui $C^\infty(R^n)$, această serie converge, deci, pe baza completitudinii lui C^∞, $f \in C^\infty(R^n)$. Rămîne de arătat că $T(f) = \sum c_\alpha x^\alpha$. Dar, pentru orice $m \geqslant k$, $\sum_{m>k} (P_{m+1} - P_m - g_m)$ este k-plată în origine, ca sumă de funcții k-plate.

Prin urmare $T^k(f) = T^k(P_0 + \sum^{k-1} (P_{m+1} - P_m - g_m)) = P_k$, deci $\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} = c_\alpha$ pentru orice $|\alpha| \leqslant k$. Dar k este arbitrar, deci egalitatea are loc pentru orice α.

Demonstrația lemei necesită ceva mai multe calcule. Alegem o funcție $k(x)$, nenegativă, nulă pentru $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ și identic egală cu 1 pentru $|x| \geqslant 1$. În plus, $k(x) \in C^\infty$. Există bineînțeles astfel de funcții (de ce?).

Fie $g_\varepsilon(x) = k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)$, cu $\varepsilon > 0$. Vom arăta că pentru orice α, $|\alpha| \leqslant m$, $|D^\alpha g_\varepsilon(x) - D^\alpha f(x)| \to 0$ uniform pe R^n, cînd $\varepsilon \to 0$, ceea ce este suficient pentru a demonstra lema. Avem

$$\sup_{x \in R^n} |D^\alpha g_\varepsilon(x) - D^\alpha f(x)| = \sup_{|x| < \varepsilon} |D^\alpha g_\varepsilon(x) - D^\alpha f(x)|.$$

Cum f este m-plată în origine, $\sup_{|x| \leq \varepsilon} |D^\alpha f(x)| \to 0$ dacă $|\alpha| \leqslant m$. (și $\varepsilon \to 0$).

Pentru a evalua pe $D^\alpha g_\varepsilon(x)$ folosim formula lui Leibniz

$$D^\alpha g_\varepsilon(x) = \sum_{\mu+\nu=\alpha} \binom{\alpha}{\nu} \varepsilon^{-|\nu|} \left(D^\nu k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) (D^\mu f)(x)$$

(aici $\binom{\alpha}{\nu}$ sînt „coeficienții binominali"). Dar funcția $k(x)$ nefiind diferită de o constantă decît în „coroana" $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1$, toate derivatele sale vor fi mărginite.

Fie $M_\nu = \sup\limits_x |D^\nu k(x)|$

$$|D^\alpha g_\varepsilon(x)| \leqslant \sum_{\mu+\nu=\alpha} M_\nu \binom{\alpha}{\nu} \varepsilon^{-|\nu|} |(D^\mu f)(x)|.$$

Funcția $D^\mu f(x)$ este $m + |\mu|$ -plată în origine și deci raportul $\sup\limits_{|x|\leqq\varepsilon} \frac{D^\mu f(x)}{\varepsilon^{m-|\mu|}}$ tinde către zero cînd $x \to 0$, ceea ce vom nota prin $\sup\limits_{|x|<\varepsilon} D^\mu f(x) = 0\,(\varepsilon^{m-|\mu|})$. Rezultă deci că $\varepsilon^{-|\nu|} |D^\mu f(x)| = 0\,(\varepsilon^{m-|\mu|-|\nu|})$ tinde către zero, cînd $\varepsilon \to 0$ (pentru $|\alpha| \leqslant m$) și lema este demonstrată.

Analiticitate

Vom trece la o clasă de funcții mai restrînse decît funcțiile diferențiabile, dar care, prin proprietățile lor cu totul remarcabile, oferă satisfacții estetice și prezintă o deosebită importanță. Este vorba despre funcțiile analitice. De studiul acestor funcții sînt legate numele lui Cauchy, Riemann, K. Weierstrass, și în general numele tuturor marilor analiști ai secolului al XIX-lea. Aceasta în ceea ce privește funcțiile de o variabilă. Funcțiile analitice de mai multe variabile, prezintă de asemenea o mare importanță, dar studiul lor s-a izbit mult timp de mari dificultăți. Astăzi, ele încep să fie mai bine cunoscute, însă mult mai puțin decît cele de o singură variabilă. Unele capitole ale Fizicii teoretice le utilizează în mod esențial, înțelegerea anumitor fenomene ce le sînt specifice necesitînd înmănuncherea (sau

Augustin Louis Cauchy
(1789—1857)



chiar crearea) unor noi metode generale, legate de Algebră, Topologie și Geometrie. Însă în cele cîteva pagini care urmează ne vom ocupa exclusiv de funcțiile analitice de o variabilă și, de data aceasta expunerea va avea mai mult un caracter informativ. De cele mai multe ori nu vom da demonstrații (ele se găsesc în orice carte de teoria funcțiilor) atrăgîndu-vă însă atenția că vom utiliza efectiv, în ultimul capitol, unele rezultate (teorema lui Liouville).

Punctul de plecare va fi formula lui Taylor. Fie $f(x)$ o funcție infinit diferențiabilă, fie $T(f)$ dezvoltarea sa Taylor în jurul unui punct (pentru a fixa ideile, să presupunem în jurul originii) și să facem ipoteza că $T(f)(x)$ converge către $f(x)$, adică $\sum_{|\alpha|\leq m} \frac{D^{\alpha}f(0)}{\alpha!} x^{\alpha} \to f(x)$ cînd $m\to\infty$ pentru

$|x| < \rho$ ($\rho > 0$). Deci, în acest caz, $f(x) = \sum_{|\alpha|=0} c_\alpha x^\alpha$ și vedem că în vecinătatea originii $f(x)$ se reprezintă ca o serie de puteri (convergentă). Atragem atenția asupra faptului că convergența seriei Taylor $T(f)$ nu implică egalitatea $T(f)(x) = f(x)$.

Se poate întîmpla ca $T(f)(x)$ să conveargă către o limită care să difere de $f(x)$. Un exemplu simplu este oferit de funcția $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ dacă $x \neq 0$, și zero dacă $x = 0$, a cărei dezvoltare Taylor este identic nulă.

Se spune că o funcție $f(x)$ este analitică dacă în vecinătatea oricărui punct x_0 al domeniului ei de definiție, se poate dezvolta în serie de puteri, i.e. $f(x) = \sum c_\alpha (x - x_0)^\alpha$ pentru $|x - x_0| < \rho(x_0)$ ($\rho(x_0) > 0$ se numește raza de convergență a seriei de puteri). Nu am specificat încă unde este definită și ce valori ia funcția $f(x)$. Dacă $f(x)$ este definită într-un domeniu Ω al spațiului real R^n, se spune că $f(x)$ este o funcție analitică de variabilă reală; valorile sale pot fi reale sau complexe. Dacă $f(x)$ este definită într-un domeniu Ω al spațiului complex C^n, atunci se spune că $f(x)$ este analitică de variabile complexe; vom vedea că în acest caz (cu excepția funcțiilor constante) $f(x)$ trebuie să aibă, în mod necesar, valori complexe.

Vom presupune de-acum încolo că funcțiile considerate sînt funcții analitice de o variabilă complexă și vom nota variabila cu z.

Pentru a prezenta mai clar lucrurile vom examina mai întîi proprietățile seriilor de puteri. Fie $\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ o serie formală și fie seria numerică (cu termeni pozitivi) $\sum |c_n| r^n$. Mulțimea numerelor r pentru care această serie numerică converge este un interval avînd ca extremitate stîngă numărul zero (eventual această mulțime se poate reduce la mulțimea $\{0\}$). Fie ρ lungimea acestui interval. Numărul ρ se numește *raza de convergență* a seriei $\sum c_n z^n$, numire justificată de următorul rezultat: pentru orice $r < \rho$, seria

$\sum c_n z^n$ converge absolut și uniform dacă $|z| \leqslant r$. Dacă $|z| > \rho$, seria este divergentă.

Demonstrația se face imediat, prin comparație cu o progresie geometrică. Anume, dacă $r < \rho$, există r_0, astfel încît $r < r_0 < \rho$. Seria $\sum |c_n| r_0^n$ converge, deci există o constantă M astfel încît $|a_n| r_0^n \leqslant M$; dar atunci $|c_n z^n| =$

$$= |c_n| r^n = |c_n| r_0^n \frac{r^n}{r_0} \leqslant M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$ și, cum $0 < \frac{r}{r_0} < 1$, seria

converge. Divergența pentru $|z| > \rho$ se demonstrează asemănător.

Se arată ușor că raza de convergență este dată de formula $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n \to \infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}$.

Fie acum $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ o serie de puteri, ρ raza sa de convergență și $S'(z)$ seria $\sum_{n \geqslant 1} n c_n z^{n-1}$ (această serie s-a obținut derivînd formal pe $S(z)$ termen cu termen). Raza de convergență a seriei „derivate" este de asemenea ρ, și, pentru $|z| < \rho$, $S'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$ *. Aici trebuie să atragem atenția că h poate lua și valori complexe, deci derivata „se face în complex".

Pentru demonstrație notăm $\alpha_n = |c_n|$ și ρ, ρ' razele de convergență ale lui S și respectiv S'. Dacă $r < \rho'$, seria

$\sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n r^{n-1}$ este convergentă. Dar atunci

---

* Dacă utilizăm formula $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ și dacă ținem seama că $\sqrt[n]{n} \to 1$ pentru $n \to \infty$, prima concluzie rezultă imediat.

$\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n r^n \leqslant r \left(\sum n\alpha_n r^{n-1}\right) < +\infty$, deci $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n r^n$ este convergentă (adăugarea termenului α_0 nu modifică desigur convergența); aceasta înseamnă că $r < \rho$, deci $\rho' \leqslant \rho$. Fie acum $r < \rho$; alegem pe r' astfel ca $r < r' < \rho$. Atunci $n\,\alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'}\,(\alpha_n r'^n) n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$. Dar $r' < \rho$ implică existența unei constante $M > 0$: $\alpha_n r'^n \leqslant M$ pentru orice n. Deci

$$n\,\alpha_n r^{n-1} \quad \frac{M}{r'} \quad n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$$

Dar este ușor de văzut că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$ este convergentă $\left(\text{nu uitați: } 0 < \frac{r}{r'} < 1\text{, de unde și convergența seriei } \sum n\alpha_n r^{n-1}\right)$, deci $r' < \rho'$, adică $\rho \leqslant \rho'$ și deci $\rho = \rho'$.

Pentru a demonstra relația $S'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$ (relația care justifică aposteriori notația $S'(z)$) remarcăm mai întîi că dacă $|z| < \rho$, atunci, pentru h suficient de mic, $|z + h| < \rho$. Fie $|z| < \rho$. Alegem pe r astfel încît $|z| < r < \rho$ și luăm $|h| < r - |z|$, deci $S(z+h)$ are sens. Diferența

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \delta\,(z, h)$$

se poate scrie sub forma

$$\delta(z, h) = \sum_{n\geqslant 1} u_n(z, h),$$

unde $u_n(z, h) = c_n \{(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}\}$ sînt polinoame în h. Cum $|z|$ și $|z+h|$ sînt

majorate de r şi cum u_n are n termeni, obţinem $|u_n(z, h)| \leqslant \leqslant |c_n| 2nr^{n-1} = \alpha_n 2 r^{n-1}$. Însă deoarece seria $\sum_{n\geqslant 1} n\alpha_n r^{n-1}$ converge, pentru n destul de mare ($n \geqslant N(\varepsilon)$) avem

$$\sum_{n>N(\varepsilon)} n\,\alpha_n r^{n-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pe de altă parte, polinoamele în h, $u_n(z, h)$, sînt nule pentru $h = 0$, deci pentru $n \leqslant N(\varepsilon)$ există $\eta > 0$, astfel încît $|h| < \eta$ să implice $\left|\sum_{n\leqslant N(\varepsilon)} u_n(z, h)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Deci $\varepsilon > 0$ fiind dat, pentru $|h| < \eta$ putem scrie

$$|\delta(z, h)| \leqslant \left|\sum_{n\leqslant N(\varepsilon)} u_n(z, h)\right| + \left|\sum_{n>N(\varepsilon)} 2n\alpha_n r^{n-1}\right| \leqslant \varepsilon, \text{ q.e.d.}$$

Putem aplica acest rezultat seriilor $S'(z)$ şi $S''(z) = \sum_{n\geqslant 2} c_n n(n-1)z^{n-2}$ şi se obţine că $S''(z)$ are aceeaşi rază de convergenţă cu S' şi deci cu S ş.a.m.d. În definitiv rezultă că o funcţie reprezentată printr-o serie de puteri este infinit derivabilă.

Totodată se verifică numaidecît că c_n sînt tocmai coeficienţii dezvoltării Taylor, în jurul originii, $c_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0)$.

Acest rezultat arată însă că dacă $S(z)$ este identic nul într-o vecinătate oricît de mică a originii, atunci (căci $S^{(n)}(0) = 0$ pentru orice n) toţi coeficienţii săi sînt nuli. În particular, rezultă de aici că dacă $f(z)$ este reprezentabilă în serie de puteri în vecinătatea unui punct, atunci această reprezentare este *unică* şi este dată chiar de formula lui Taylor.

Este evident că trecerea de la punctul zero la un punct oarecare z_0 nu pune dificultăţi: în loc de a considera seria de forma $S(z) = \sum c_n z^n$, se consideră seria $S(z, z_0) =$

$=\sum c_n(z-z_0)^n$ și cele spuse mai înainte rămîn valabile. Se poate arăta că dacă $S(z)=\sum c_n z^n$, atunci $S(z)$ este analitică, mai precis că pentru orice $|z_0|<\rho$, ρ fiind raza de convergență a seriei $S(z)$, $S(z)$ se poate dezvolta în serie de puteri în jurul lui z_0, i.e., pentru $|z-z_0|<\rho-|z_0|$,

$$S(z)=\sum \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Dacă $f(z)$ este analitică și identic nulă în vecinătatea unui punct, ea este identic nulă în componenta conexă a domeniului său de definiție căreia îi aparține acel punct. Iată deci o deosebire fundamentală față de funcțiile diferențiabile generale.

Mai mult, o funcție analitică (de o variabilă) nu are decît zerouri izolate (dacă funcția nu este identic nulă), ceea ce se vede imediat considerînd dezvoltarea sa în jurul unui punct în care ea se anulează. Deoarece suma sau diferența a două funcții analitice este evident analitică, rezultă de aici că dacă două astfel de funcții coincid pe o mulțime de puncte care au un punct de acumulare în interiorul domeniului lor comun de definiție, atunci ele, în mod necesar, sînt egale peste tot în acel domeniu.

Vom spune că o funcție $f(z)$ este olomorfă într-un domeniu Ω, dacă pentru orice $z_0\in\Omega$ există $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ (remarcați că h ia valori complexe și deci că existența acestei limite este o cerință mult mai puternică decît derivabilitatea uzuală).

Scriind $f(z)=f(x+iy)=\mathrm{Re}\,f(z)+i\mathrm{Im}\,f(z)$ și notînd $\mathrm{Re}\,f(z)=P(x,y)$ și $\mathrm{Im}\,f(z)=Q(x,y)$, să vedem ce relații între P și Q atrag olomorfia lui $f(z)$. Pentru aceasta vom scrie cîtul $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ sub forma $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ și vom face pe z să tindă către z_0 pe două drumuri diferite: mai întîi pe o dreaptă paralelă cu cea reală apoi pe o dreaptă paralelă cu axa imaginară. Valorile obținute la limită tre-

buie să fie egale. În primul caz găsim $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, și în al doilea, $f'(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$.

Egalînd aceste două expresii găsim așa-numitele ecuații ale lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Se poate arăta, reciproc, că dacă în orice punct din Ω sînt îndeplinite ecuațiile lui Cauchy-Riemann, atunci $f(z)$ este olomorfă. Dacă notăm $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, atunci condiția de olomorfie se poate scrie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Am arătat că orice serie de puteri este olomorfă. Reciproca se arată utilizînd o formulă fundamentală, formula lui Cauchy. Deci cîteva cuvinte despre formula lui Cauchy. Lui Cauchy i se datorește ideea de a deriva și integra funcțiile de o variabilă complexă, idee extrem de fecundă.

Formulele lui Cauchy utilizează noțiunea de integrală curbilinie; iată lămuririle necesare. Se numește drum în planul complex imaginea continuă în C a unui segment $[a, b]$. Vom presupune în plus că drumul Γ este rectificabil, ceea ce revine la faptul că funcțiile care-l definesc pe Γ, $x(t)$ și $y(t)$. ($t \in [a, b] \to z(t) = x(t) + iy(t)$), sînt cu variație mărginită. Dacă $f(z)$ este o funcție continuă și definită pe Γ, putem considera sumele $\sum f(z'_k)\,(z_k - z_{k-1})$, unde z'_k, z_k și z_{k-1} sînt puncte de pe Γ, $z_k = z(t_k)$, punctele $\{t_k\}$ fiind o diviziune a segmentului $[a, b]$ (aici $z'_k = z(t'_k)$ cu $t_{k-1} \leqslant t'_k \leqslant t_k$). Se arată (ca în cazul integralei Riemann) că atunci cînd norma $\nu(d)$ a diviziunii $\{t_k\}$ tinde către zero, aceste sume tind către nu număr notat $\int_\Gamma f(z)dz$, integrala lui f de-a lungul drumului Γ.

Fie acum $f(z)$ o funcție olomorfă în D și fie Γ un contur oarecare închis, fără puncte multiple, astfel încît Γ și domeniul interior mărginit de Γ să fie incluse în D. Atunci valoarea lui $f(z)$ într-un punct interior domeniului mărginit de Γ se exprimă în modul următor („formula lui Cauchy"):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz.$$

Cu alte cuvinte, valoarea într-un punct interior depinde doar de valorile lui f luate pe conturul Γ, ceea ce este într-adevăr un fapt remarcabil. Plecînd de la această formulă, se arată ușor (dar n-o vom face) că orice funcție olomorfă este analitică și, mai mult, se obține că derivatele $f^{(n)}(z_0)$ se exprimă astfel:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Fie $f(z)$ olomorfă; atunci, în jurul unui punct z_0,

$f(z) = \sum \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) = \sum c_n(z-z_0)^n$ și evaluînd pe $|c_n|$ obținem imediat că

$$|c_n| \leqslant 2\pi r \cdot \frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0,1,\ldots,$$

unde $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Acestea sînt inegalitățile lui Cauchy.

Ca aplicație imediată a acestor inegalități vom demonstra *teorema lui Liouville*. O funcție analitică în întreg planul C^1 (o astfel de funcție se numește întreagă) și mărginită, este o constantă. Într-adevăr, dacă $|f(z)| < M$ pentru orice z, atunci $|c_n| < \frac{M}{r^n}$ pentru orice $r > 0$, deci,

făcînd pe $r \to \infty$, obținem că $c_n = 0$ pentru $n = 1,2,\ldots$, prin urmare $f(z) = c_0$.

Teorema lui Liouville permite demonstrarea rapidă a așa-numitei „teoreme fundamentale a algebrei". Anume, vom demonstra că orice polinom, ai cărui coeficienți sînt numere complexe, posedă cel puțin o rădăcină complexă. Fie deci $P(z)$ un polinom oarecare și să presupunem că $P(z)$ nu are nici o rădăcină, cu alte cuvinte că $P(z) \neq 0$ pentru orice $z \in C$. Dar atunci funcția $\frac{1}{P(z)} = f(z)$ va fi o funcție analitică în întreg planul complex, adică o funcție întreagă. Mai mult $f(z)$ va fi mărginită căci $|P(z)|$ tinde către infinit cînd $|z| \to \infty$, deci pentru z suficient de mari, de pildă pentru $|z| > R(\varepsilon)$, avem $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \varepsilon$. În interiorul discului $|z| \leqslant R(\varepsilon)$ funcția continuă $\frac{1}{|P(z)|}$ va fi mărginită, deci $|f(z)|$ va fi mărginită în C. Dar atunci, pe baza teoremei lui Liouville, $f(z)$ va fi constantă, i.e. $\frac{1}{P(z)} = c$, ceea ce este desigur absurd.

Cu ajutorul formulei lui Cauchy putem demonstra altă proprietate importantă a funcțiilor olomorfe, anume principiul maximului modulului.

Fie $f(z)$ olomorfă; funcția $|f(z)|$ este o funcție cu valori nenegative. Ei bine, această funcție își atinge maximul doar pe frontiera domeniului în care este definită $f(z)$. Dacă $|f(z)|$ își atinge maximul într-un punct interior a, atunci $f(z) = f(a)$ în orice alt punct z, prin urmare f se reduce la o constantă. Fie deci a un punct de maxim relativ al modulului, i.e. a este astfel încît există o vecinătate a sa V cu proprietatea că $|f(z)| < |f(a)|$ pentru orice $z \in V - \{a\}$. Aplicăm formula lui Cauchy în punctul a, alegînd

drept contur Γ un cerc C cu centrul în a, și astfel încît C să fie inclus în V. Atunci

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz, \text{ deci } |f(a)| < \sup_{z \in C} |f(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{z \in V - \{a\}} |f(z)| < |f(a)|,$$

ceea ce este absurd, prin urmare $f(z)$ nu are maxime relative în interior.

Tot cu ajutorul formulei lui Cauchy se arată ușor că limita unui șir convergent de funcții olomorfe este olomorfă (spre deosebire de situația generală: limita uniformă a unui șir de funcții diferențiabile poate foarte bine să nu fie diferențiabilă).

Cu acestea se încheie considerațiile noastre privind funcțiile analitice. Folosind o exprimare euristică, putem spune că funcțiile analitice sînt funcții ale căror valori prezintă cea mai mare „coerență", cel mai frapant aspect fiind desigur formula integrală a lui Cauchy.

Din nou despre funcțiile diferențiabile

Acest paragraf reunește cîteva rezultate care e bine să le cunoașteți, chiar fără demonstrații.

Prima problemă de care ne vom ocupa este aceea a cvasianaliticității. Știți foarte bine că dacă $f(x)$ este o funcție analitică de o variabilă reală, definită pe un segment $[a, b]$, și dacă toate derivatele sale se anulează într-un același punct ξ $(f^{(n)}(\xi) = 0,\ n = 0,1,\ldots,)$, atunci f va fi identic nulă pe $[a, b]$.

S-a pus întrebarea dacă această proprietate *caracterizează* funcțiile analitice. În mod destul de surprinzător, răspunsul este negativ. Există funcții infinit derivabile

dar care nu sînt analitice cu proprietatea că dacă toate derivatele lor sînt nule într-un punct, funcția este identic nulă.

Să arătăm mai întîi că dacă $f(x)$ de clasă C^∞ verifică pe $[a, b]$ condiția: există o constantă pozitivă K astfel încît $|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n n!$ pentru orice $x \in [a, b]$ $(n, = 0,1 \ldots)$, atunci $f(x)$ este analitică pe $[a, b]$.

Aceasta se arată imediat folosind formula lui Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-\xi)^n,$$

unde $\theta \in [\xi, x]$. Dar $\frac{1}{n!}|f^{(n)}(\theta)(x-\xi)^n| \leqslant K^n |x-\xi|^n$,

deci, pentru $|x - \xi| < \frac{1}{K}$, restul tinde către zero, ξ fiind

un punct oarecare al intervalului $[a, b]$. Cu alte cuvinte, în jurul fiecărui punct din $[a, b]$ funcția $f(x)$ este dezvoltabilă în serie de puteri, prin urmare $f(x)$ este analitică pe $[a, b]$.

Reciproc, dacă $f(x)$ este analitică, ea se poate dezvolta, în jurul fiecărui punct, în serie de puteri absolut și uniform convergentă; funcția se poate prelungi în planul complex într-o funcție analitică $f(z)$, iar inegalitățile lui Cauchy, precum și lema lui Borel-Lebesgue ne conduc la concluzia dorită.

Fie $C\{M_n\}$, M_n fiind un șir de numere pozitive, familia funcțiilor de clasă C^∞, definite pe un interval I, astfel încît, pentru orice $f \in C\{M_n\}$, există o constantă $K = K(f)$ cu proprietatea că $|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n M_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ pentru orice $x \in I$.

Vom spune că $C\{M_n\}$ este o clasă cvasianalitică de funcții, dacă orice $f \in C\{M_n\}$, cu $f^{(n)}(\xi) = 0$ $(n = 0,1, \ldots)$, pentru un $\xi \in I$ rezultă identic nulă.

Rezultatul de mai înainte ne spune că $C\{n!\}$ este cvazianalitică pe $[a, b] = I$. Matematicianul francez J. Hadamard a formulat în 1912 următoarea problemă: să se carac-

terizeze șirurile $\{M_n\}$ pentru care clasa $C\{M_n\}$ corespunzătoare este cvasianalitică. Răspunsul este oferit de următoarea teoremă (Denjoy-Carleman-Ostrowski). Fie $M_0 = 1$, $M_n^2 < M_{n-1}M_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$, $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{M_n}$, $q(x) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{M_n}$ $(x > 0)$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

1° $C\{M_n\}$ nu este cvasianalitică;

2° $\int_0^{\infty} \log Q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty$;

3° $\int_0^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty$;

4° $\sum \left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n} < \infty$;

5° $\sum \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty$.

În acest mod clasele cvasianalitice $C\{M_n\}$ sînt complet caracterizate. Demonstrația apelează însă în mod esențial la metode de teoria funcțiilor de o variabilă complexă și nu este elementară. De aceea o vom omite.

Se poate arăta ușor că dacă $C\{M_n\}$ nu este cvasianalitică, atunci $C\{M_n\}$ conține în mod necesar funcții cu suport compact.

Se știe de asemenea că intersecția tuturor claselor $C\{M_n\}$ care nu sînt cvasianalitice (șirul $\{M_n\}$ verificînd o condiție simplă) coincide cu mulțimea funcția analitice. Și acesta este un rezultat destul de surprinzător.

O altă problemă interesantă este aceea a prelungirii funcțiilor diferențiabile. Rezultatul central în această chestiune este o teoremă celebră a lui Whitney.

Fie A un compact oarecare din R^n și f o funcție definită pe A. Se pune problema: cînd funcția f poate fi pre-

lungită la întreg spațiul R^n, astfel încît prelungirea F să fie de clasă C^r (sau C^∞). A prelungi pe f înseamnă a găsi F astfel încît restricția $F|_A$, a lui F la A, să coincidă cu f. Răspunsul este dat tocmai de teorema lui Whitney:

Dacă există funcții f_α cu $|\alpha| \leqslant r$ (sau, pentru orice α) definite pe A astfel încît:

a) $f_0 = f$, b) funcția $R_\alpha(x, y)$ definită de egalitatea

$$f_\alpha(y) = \sum_{|\beta| \leqslant r-|\alpha|} \frac{f_{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^{\alpha+\beta} + R_\alpha(x, y)$$

verifică, pentru orice $x_0 \in A$, condiția $\frac{|R_\alpha(x_1, x_2)|}{|x_1 - x_2|^{r-|\alpha|}} \to 0$ cînd $x_1, x_2 \to x_0$ (desigur totul se petrece pe mulțimea A), atunci f admite o prelungire F, de clasă C^r (respectiv de clasă C^∞), astfel încît $D^\alpha F|_A = f_\alpha$.

Două observații:

1° în cazul în care A se reduce la un punct, teorema lui Witney se reduce la teorema lui Borel;

2° condiția b) nu poate fi înlocuită prin condiția aparent mai naturală $\frac{R_\alpha(x, y)}{|x-y|^{r-|\alpha|}} \to 0$ cînd $x \to y$, după cum se poate verifica pe contraexemple.

Cu toate deosebirile existente între funcțiile diferențiabile și cele analitice, s-a remarcat în ultima vreme că, din anumite puncte de vedere, există între ele asemănări profunde. Cel mai izbitor rezultat în această direcție a fost obținut în 1962 de matematicianul francez B. Malgrange. Demonstrația lui Malgrange era extrem de dificilă, dar în 1966 a fost găsită o demonstrație elementară (și mult mai simplă) care arată că, în fond, rezultatul lui Malgrage ar fi putut fi obținut cu mult mai devreme. Iată despre ce este vorba. Se știe (K. Weierstrass a remarcat acest lucru) că o funcție analitică de mai multe variabile, $f(z_1, \ldots, z_n)$, cu proprietatea că: 1° $f(0, \ldots, 0) = 0$ și 2° $f(0, \ldots, z_n)$ are, pen-

tru $z_n = 0$, un zero de ordin p, se poate reprezenta sub forma

$$f(z_1,\ldots, z_n) = \left(z_n^p + \sum_{k=1}^{p} a_k z_n^{p-k}\right) u(z_1,\ldots, z_n),$$

unde a_k sînt funcţii analitice *ce depind doar de n-1 variabile*, $a_k(0) = 0$ $(k = 1,\ldots, p)$, iar $u(z_1,\ldots, z_n)$ este o funcţie analitică ce nu se anulează pe o vecinătate a originii. Reprezentarea este unică. În acest mod $f(z_1,\ldots, z_n)$ „se aseamănă" cu un polinom într-o variabilă, cu coeficienţi funcţii olomorfe în celelalte $(n-1)$ variabile. Acest rezultat este absolut fundamental în teoria funcţiilor de mai multe variabile. În particular, orice funcţie analitică φ în vecinătatea originii se poate reprezenta, în mod unic, sub forma $\varphi = af + \sum_{k=1} b_k x_n^{n-k}$ pe o vecinătate (precizată) a originii, cu b_k funcţii analitice care depind doar de primele $(n-1)$ variabile. Rezultatul de mai sus se numeşte teorema de pregătire a lui Weierstrass.

Malgrage a obţinut o teoremă de pregătire în cazul diferenţiabil. Fie $F(x_1,\ldots, x_n)$ o funcţie de clasă C^∞, regulată în variabila x_n, de ordin p, adică astfel încît $f(0,\ldots, 0, x_n)$ are în $x_n = 0$ un zero de ordinul p. Atunci orice funcţie de clasă C^∞ în n variabile, f, se poate reprezenta sub forma

$$f = QF + \sum_{k} r_k x^{p-k},$$

unde Q este o funcţie diferenţiabilă de n variabile, iar r_k funcţii diferenţiabile de primele $(n-1)$ variabile. Se pierde totuşi ceva: se pierde unicitatea reprezentării. Rezultatul este însă surprinzător şi el a fost folosit încă de pe acum la o serie întreagă de probleme importante.

CAPITOLUL VII

ALGEBRE DE FUNCŢII

Algebre Banach

Am văzut pînă în prezent că pentru unele probleme de analiză considerarea spaţiilor vectoriale lămureşte mult lucrurile şi că este uneori chiar indispensabilă. Numeroase probleme de analiză au în fond un caracter geometric şi ele pot fi înţelese bine doar în acest context (chiar dacă s-a întîmplat ca ele să fi fost rezolvate mai înainte cu alte metode). Este natural să ne întrebăm ce se întîmplă dacă, în locul spaţiilor vectoriale, se vor considera mulţimi cu o structură algebrică diferită.

În acest capitol vom expune principalele proprietăţi ale unor algebre ce intervin adesea în Analiza matematică. Prin definiţie, o algebră peste corpul cu R (sau C) al numerelor reale (respectiv complexe) este o mulţime A, care pe lîngă structura de spaţiu vectorial (peste R sau, respectiv, peste C) este dotată şi cu o operaţie de înmulţire, i.e. o aplicaţie definită pe $A \times A$ cu valori în A, $(x, y) \to xy$ ce verifică proprietăţile naturale: $(x+y)z = xz + yz$, $(\lambda x)y = \lambda(xy)$, $x(yz) = (xy)z$. În definiţie nu se cere comutativitatea înmulţirii, i.e. nu se cere verificarea condiţiei $xy = yx$. În cele ce urmează, din motive de simplitate şi de spaţiu, vom considera doar algebre comutative, deci algebre în care înmulţirea verifică condiţia $xy = yx$. Dintre algebre ne vor interesa doar cele care sînt înzestrate cu o normă, astfel încît:

1° mulţimea A, ca spaţiu vectorial, să fie un spaţiu Banach,

2° pentru orice pereche de elemente $x, y \in A$, $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$ (această condiţie ne asigură că operaţia de înmulţire este continuă).

O algebră A, înzestrată cu o normă $\|\cdot\|$ care să verifice condiţiile 1° şi 2° se numeşte algebră Banach (dacă este

verificată doar condiția 2°, iar A nu este completă, vom spune că avem de-a face cu o algebră normată). Se pot da numeroase exemple de algebre Banach, dar cele mai importante vor fi următoarele: algebra $C(K)$ a funcțiilor continue definite pe un spațiu compact K și algebra $L^1(R^1)$ al funcțiilor sumabile pe dreaptă. Trebuie să precizăm operația de înmulțire. În cazul lui $C(K)$ înmulțirea va fi înmulțirea uzuală, adică pentru $f, g \in C(K)$, (fg) va fi funcția $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$; norma pe $C(K)$ fiind $\| f \| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Condiția $\|fg\| \leqslant \| f\| \, \| g\|$ este evident verificată. (De ce n-avem întotdeauna $\|fg\| = \|f\| \, \|g\|$? Gîndiți-vă!). În cazul algebrei $L^1(R^1)$ înmulțirea nu va mai fi înmulțirea punctuală, ci convoluția, i.e. pentru $f, g \in L^1(R^1)$ produsul va fi definit, după cum știți, de $(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) \mathrm{d}y$. Știm că și în acest caz este valabilă inegalitatea $\| f * g\|_1 \leqslant \| f\|_1 \, \|g\|_1$, prin urmare și aici avem de-a face cu o algebră Banach. Din motive de simplitate am ales aici $L^1(R^1)$. De fapt, extrem de importante sînt algebrele $L^1(G)$, unde G este un grup abelian local compact, integrarea făcîndu-se în raport cu măsura Haar. Cazul $G = R^1$ este desigur cel mai la îndemînă.

Algebrele $C(K)$ și $L^1(R^1)$ se deosebesc însă nu numai prin modul în care s-a definit înmulțirea, ci și prin faptul că $C(K)$ posedă element unitate, pe cînd $L^1(R^1)$ nu. Ce este elementul unitate? Este un element pe care-l vom nota cu e sau cu 1 (cînd nu sînt confuzii posibile), cu proprietatea $ex = xe = x$ pentru orice element x al algebrei.

Elementul unitate al algebrei $C(K)$ va fi, evident, funcția *1* identic egală cu 1 în fiecare punct al lui K, pe care o vom nota de asemenea prin 1. În ceea ce privește inexistența elementului unitate în algebra $L^1(R^1)$, iată o demonstrație simplă, care se sprijină pe următorul fapt: dacă $f \in L^1(R^1)$, atunci $\int | f(x + h) - f(x) | \mathrm{d}x \to 0$ cînd $h \to 0$ (această afirmație rezultă din densitatea funcțiilor conti-

nue cu suport compact în $L^1(R^1)$ şi din invarianţa integralei Lebesgue la translaţii).

Vom arăta că convoluţia $(f*g)$, a oricărei funcţii f din $L^1(R^1)$ cu o funcţie măsurabilă şi mărginită g, este o funcţie continuă. Într-adevăr, dacă $|g(t)| \leqslant C$, atunci

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \leqslant C\int |f(x+h-\tau)-f(x-\tau)|\,d\tau=$$

$$= C\int |f(t+h) - f(t)|\,dt,$$

egalitatea rezultînd din invarianţa integralei Lebesgue la translaţii. Dacă $L^1(R^1)$ ar avea un element unitate e, atunci, conform definiţiei, acest e va fi un element din $L^1(R^1)$, astfel încît $e*h = h$ pentru orice $h \in L^1(R^1)$. Fie acum h o funcţie măsurabilă, mărginită, care să difere de orice funcţie continuă pe o mulţime de măsură pozitivă, şi $h \in L^1(R^1)$ (drept h se poate lua, de pildă, funcţia caracteristică a oricărui interval mărginit). Din cele spuse mai înainte ar rezulta însă că $h = e*h$ este o funcţie continuă, ceea ce este absurd.

Lipsa elementului unitate nu este însă ceva care să producă dificultăţi prea mari (spre deosebire de lipsa comutativităţii, de pildă).

Una din caracteristicile cele mai izbitoare ale matematicii este că anumite definiţii generale conduc (cu aproximaţia unui izomorfism) în mod necesar la obiecte matematice mult mai particulare. Acest lucru va fi ilustrat în cele ce urmează de două teoreme importante, teorema lui Gelfand-Mazur şi teorema de reprezentare a lui Gelfand.

Pentru a le demonstra (enunţurile vor fi date la momentul potrivit) ne trebuie unele pregătiri şi definiţii. După cum ştiţi, dacă într-un inel * orice element nenul are invers faţă de operaţia de înmulţire, inelul se spune că este un corp. Numerele reale R, sau numerele complexe C sînt corpuri. Se pune problema: ce structură are un corp Banach, adică

* Un inel este o mulţime M în care s-au definit două operaţii, înmulţirea şi adunarea, cu proprietăţile uzuale (fără a se cere comutativitatea înmulţirii), astfel încît pentru orice x să existe un element $-x$ care să îndeplinească condiţia: $x + (-x) = 0$.

o algebră Banach în care fiecare element nenul are un invers? Răspunsul pare surprinzător și este dat de *teorema lui Gelfand-Mazur*: orice corp Banach este izomorf în corpul numerelor complexe!

După cum spuneam, vom avea nevoie de unele pregătiri. În primul rînd va fi necesară utilizarea funcțiilor analitice cu valori în spații Banach. Fie deci E un spațiu Banach, Ω un domeniu din planul complex, $f: \Omega \to E$, o funcție definită pe Ω, cu valori în E. Funcția f este derivabilă în punctul λ_0, dacă există $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$, notată cu $f'(\lambda_0)$. Putem defini imediat și integrala unei asemenea funcții f, de-a lungul unui drum Γ rectificabil, conținut în Ω. Este suficient să considerăm o reprezentare parametrică $\lambda = \varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ a curbei Γ și să considerăm sumele Riemann corespunzînd funcției $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ (presupunem că f este continuă și că φ' este continuă). Exact aceleași raționamente care conduc la demonstrația existenței integralei în cazul funcțiilor cu valori în R sau C (funcții pe care le putem numi, din motive evidente, scalare), cu singura diferență că în loc de valoarea absolută se utilizează norma spațiului E, arată că $\int_0^1 f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$ există (este un element din E) și se poate demonstra (ca în cazul scalar) că acest element, notat cu $\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda$, *nu depinde* de reprezentarea parametrică aleasă pentru curba Γ.

Putem considera de asemenea serii de puteri, de forma $\sum\limits_{n=0} a_n(\lambda - \lambda_0)^n$, cu a_n elemente ale spațiului Banach E, λ și λ_0 fiind numere complexe. Regulile de derivare, de integrare, de derivare termen cu termen și de integrare termen cu termen, rămîn valabile și în acest context mai general al funcțiilor cu valori într-un spațiu Banach.

Prin definiție, se spune că o funcție f (cu valori în E) este analitică, dacă, pentru orice punct al domeniului ei de definiție Ω (Ω deschis), există o vecinătate în care f să fie reprezentată printr-o serie de puteri uniform convergentă.

Vom spune că f este scalar analitică, dacă, pentru orice formă liniară $u \in E'$ funcţia (scalară) $u(f(\lambda)) = \Phi_u(\lambda)$ este o funcţie analitică în Ω. Vom demonstra următoarea teoremă: *dacă funcţia continuă* f *este scalar analitică în* Ω, *ea este analitică în* Ω *şi reciproc* (reciproca rezultă imediat).

Pentru demonstraţie vom utiliza teorema lui Cauchy. Anume, faptul că f este scalar analitică înseamnă că, pentru orice formă liniară $u \in E'$, $u(f(\lambda))$ este analitică în Ω ($u(f(\lambda)) = \Phi_u(\lambda)$ este o funcţie scalară, adică cu valori complexe). Aplicînd teorema lui Cauchy va rezulta că $u(f(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(f(\lambda))}{\xi - \lambda} d\xi$ pentru orice cerc $\Gamma \subset \Omega$ şi pentru orice punct λ situat în interiorul lui Γ. Dar din liniaritatea lui u rezultă, mai întîi că $u(f(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u\left(\frac{f(\xi)}{\xi - \lambda}\right) d\xi$ şi apoi că $u(f(\lambda)) = u\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi\right)$.

Ştim însă că egalitatea $u(f) = u(g)$ pentru orice $u \in E'$, atrage $f = g$ (putem aplica teorema Hahn-Banach). În cazul nostru g va fi $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{\xi - \lambda}$ $d\xi$, deci am stabilit egalitatea $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi$, Γ fiind o circumferinţă oarecare situată în Ω, iar λ un punct din interiorul lui Γ. Dar dacă f verifică o astfel de egalitate, ea este în mod necesar analitică în Ω. Într-adevăr, trebuie să arătăm că, în vecinătatea fiecărui punct din Ω, f poate fi reprezentată printr-o dezvoltare în serie de puteri. Fie deci $\lambda_0 \in \Omega$, iar Γ un cerc suficient de mic, centrat în λ_0, astfel ca întregul disc, a cărui frontieră este Γ să fie inclus în Ω, şi fie ξ un punct pe Γ. Se vede că $\frac{1}{\xi - \lambda} = \frac{1}{\xi - \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{\xi - \lambda_0}}$. Cum $\left|\frac{\lambda - \lambda_0}{\xi - \lambda_0}\right| < 1$, atunci $\frac{1}{1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{\xi - \lambda_0}}$ este suma progresiei geometrice $\sum\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\xi - \lambda_0}\right)^n$ ce converge uniform. De aici rezultă

că putem integra termen cu termen, deci obţinem în final

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n, \text{ cu } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - \lambda_0)^{n+1}}\, d\xi, \text{ q.e.d.}$$

Din forma coeficienţilor a_n (care sînt elemente din E) rezultă imediat inegalităţile lui Cauchy: anume, dacă $\|f(\lambda)\| \leqslant \leqslant M$ pe Γ şi dacă r este raza cercului Γ, avem $\|a_n\| \leqslant \frac{M}{r^n}$.

Să presupunem că f este întreagă (i.e. $\Omega = C$) şi este şi mărginită pe întreg planul complex. Putem lua, în inegalităţile lui Cauchy, pe r oricît de mare, deci $a_n = 0$ pentru $n = 1,2,\ldots$ şi deci am regăsit teorema lui Liouville în acest caz mai general: orice funcţie întreagă mărginită este o constantă (f rezultă egală cu a_0).

Fie acum A o algebră Banach cu element unitate. Vom remarca mai întîi că dacă $\|x\| < 1$, atunci $e - x$ are un invers. Într-adevăr, acest invers va fi dat de suma seriei absolut convergente $e + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ Aceasta se verifică astfel:

$$(e - x)\sum_{n=0}^{N} x^n = e - x^{N+1}. \text{ Dar } \|x^{N+1}\| \leqslant \|x\|^{N+1}$$

(proprietatea normei într-o algebră Banach), deci cum $\|x\| < < 1$, atunci $\|x\|^{N+1} \to 0$ şi deci

$$\lim_{N\to\infty} (e-x)\sum_{n=0}^{N} x^n, \text{ adică } (e - x)^{-1} = \sum_{n=0} x^n.$$

Fie acum a un element inversabil al lui A şi y un element oarecare aparţinînd interiorului bilei centrate în a, de rază $\frac{1}{\|a^{-1}\|}$. Avem $y = a - (a-y) = a\,(e-a^{-1}\,(a-y))$. Cum $\|a^{-1}(a-y)\| \leqslant \|a^{-1}\|\;\|a-y\| < 1$, $e-a^{-1}(a-y)$ este inversabil, şi cum produsul a două elemente care au invers are invers, y rezultă inversabil. Am arătat astfel că mulţimea elementelor inversabile este deschisă. Dar, mai mult, funcţia $\lambda \to (a - \lambda e)^{-1}$ sau mai general funcţia $\lambda \to (a - \lambda b)^{-1}$ definită pentru acei λ pentru care $(a-\lambda b)^{-1}$ există este analitică. Vom demonstra afirmaţia generală, anume că funcţia $\lambda \to (a-\lambda b)^{-1}$ este olomorfă. Fie Ω domeniul de definiţie al acestei funcţii, şi $\lambda_0 \in \Omega$. Trebuie

arătat că putem reprezenta pe $(a-\lambda b)^{-1}$ ca o serie de puteri în vecinătatea lui λ_0. Avem $a-(\lambda_0+\zeta)b=(a-\lambda_0 b)(e-\zeta b(a-\lambda_0 b)^{-1})$; fie $c=b(a-\lambda_0 b)^{-1}$; atunci $a-(\lambda_0+ +\zeta)b=(a-\lambda_0 b)(e-\zeta c)$. Dacă ζ este ales astfel încît $e-\zeta c$ să fie inversabil, va rezulta că și $a-(\lambda_0+\zeta)b$ este inversabil. Dar pentru $\|\zeta c\|<1$, $(a-\zeta c)^{-1}$ există și este dat chiar de o serie de puteri. Vom avea

$$(a-(\lambda_0+\zeta))\,b^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n c^n\,(a-\lambda_0 b)^{-1}=\sum_{n=1} c^n(a-\lambda_0 b)^{-1}\zeta^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\zeta^n \text{ cu } d_n=c^n(a-\lambda_0 b)^{-1},$$

deci afirmația este demonstrată (puteți verifica că convergența este absolută).

Acestea fiind spuse, să demonstrăm următoarea:

Propoziție. Într-o algebră Banach A cu unitate, $a-\lambda e$ **nu** este inversabil pentru orice λ complex (cu alte cuvinte, există cel puțin un λ, astfel ca $a-\lambda e$ să nu aibă invers).

Demonstrație. Ca în multe alte cazuri, se procedează prin reducere la absurd. Să presupunem că $(a-\lambda e)^{-1}$ există pentru orice λ. Atunci, pentru $|\lambda|>\|a\|$,

$$\|(a-\lambda e)^{-1}\|=\frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(e-\frac{a}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\sum\left\|\frac{a}{\lambda}\right\|^n=\frac{1}{|\lambda|-|a|}$$

deci funcția $\Phi(\lambda)=(a-\lambda e)^{-1}$, care este analitică, este mărginită în exteriorul cercului de rază $\|a\|$. Cum analiticitatea implică continuitatea, și cum am presupus că $\Phi(\lambda)$ este definită pentru orice λ complex (deci este o funcție întreagă), $\Phi(\lambda)$ va fi mărginită și în interiorul cercului $|\lambda|\leqslant\|a\|$, deci (conform teoremei lui Liouville) va fi o constantă în întreg planul, ceea ce este absurd. Într-adevăr, acest lucru ar însemna că elemente diferite ale algebrei noastre ar avea același invers, ceea ce este evident imposibil.

Acum demonstrația teoremei lui Gelfand-Mazur se va face imediat. Fie $a\in A$, A presupus corp Banach; din propoziția precedentă rezultă că există cel puțin un λ, astfel încît $a-\lambda e$ să nu aibă invers. Dar A este corp; singurul ele-

ment fără invers este 0, deci $a - \lambda e = 0$, i.e. $a = \lambda e$. Fiecărui element $a \in A$ îi corespunde astfel un număr complex λ_a (evident unic !) astfel ca $a = \lambda_a e$. Corespondența $a \to \lambda_a$ definită pe A cu valori în C este un izomorfism * (care este și o izometrie ** dacă $\|e\| = 1$).

Mulțimea numerelor complexe λ pentru care $a - \lambda e$ nu are invers se numește spectrul lui a și se notează cu $\sigma(a)$. Propoziția demonstrată mai înainte se poate reformula astfel: într-o algebră cu element unitate spectrul unui element oarecare nu este niciodată vid. (Atenție ! dacă algebra nu are element unitate, afirmația nu mai este adevărată.)

Despre mulțimea $\sigma(a)$ se pot spune încă o serie de lucruri: de pildă $\sigma(a)$ este compactă (de fapt $\sigma(a) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant \|a\|\}$. Demonstrația se face astfel: dacă $|\lambda| > \|a\|$, atunci $\left\|\frac{a}{\lambda}\right\| < 1$, deci $e - \frac{a}{\lambda}$ este inversabil. Dar $a - \lambda e = -\lambda\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)$, deci $e - \frac{a}{\lambda}$ este inversabil și deci $\lambda \notin \sigma(a)$, de unde concluzia căutată.

În cele ce urmează vom presupune că algebrele Banach considerate sînt comutative. În studiul structurii acestor algebre un rol deosebit îl joacă idealele maximale. I. M. Gelfand a fost acela care a avut meritul deosebit de a pune în evidență acest rol și de a arăta că unele rezultate de analiză

---

* Dacă A și B sînt două corpuri (respectiv inele sau algebre) și f o aplicație definită pe A cu valori în B, se spune că f este un omomorfism dacă f posedă următoarele proprietăți:

1° $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2° $f(xy) = f(x)f(y)$,

3° (în cazul algebrelor) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pentru orice scalar λ. f este un izomorfism dacă f^{-1} este de asemenea un omomorfism (ceea ce implică, desigur, că f este biunivocă). Dacă intervin și topologii, pentru a avea un izomorfism trebuie ca f și f^{-1} să fie continue.

** O aplicație $f: A \to B$, cu A și B spații metrice, se numește izometrie dacă $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, cu alte cuvinte, dacă aplicația f păstrează distanțele.

sînt de fapt legate de structura algebrică a unor algebre Banach mai precis, de forma idealelor maximale. La timpul său, aceasta a fost o idee cu totul nouă, care a avut o mare importanţă în dezvoltarea ulterioară a unor întregi capitole ale matematicii. Dar ce este un ideal? Un ideal I al unei algebre comutative A (noţiunea este strict algebrică şi nu se presupune că A este înzestrat cu vreo structură topologică) este o submulţime a lui A care:

1° este un subspaţiu vectorial;

2° dacă $x \in I$, atunci $yx \in$ I pentru orice $y \in A$.

Noţiunea de ideal este cunoscută de multă vreme în algebră, unde a fost introdusă de L. Kronecker şi unde joacă un rol extrem de important. Un ideal este propriu dacă diferă de idealul A; idealul M este maximal dacă nu există nici un ideal propriu J, astfel ca M să fie inclus în J. Într-o algebră comutativă cu element unitate, orice ideal propriu este inclus într-un ideal maximal, după cum rezultă imediat din lema lui Zorn (utilizaţi observaţia că unitatea e nu poate aparţine nici unui ideal propriu; de ce?). Să presupunem acum că A este o algebră Banach (comutativă şi cu element unitate). În acest caz, *orice ideal maximal* M este *închis* (aici apare structura topologică a algebrei Banach A). Este suficient de verificat că, dacă M este un ideal propriu oarecare, închiderea sa $\bar{M}$ va fi de asemenea un ideal propriu, căci în acest caz vom avea $M \subset \bar{M}$ şi din maximalitatea lui M va rezulta $M = \bar{M}$, adică M închis. Că $\bar{M}$ este un ideal, rezultă din continuitatea operaţiilor. Faptul că $\bar{M}$ este propriu, rezultă astfel: pentru ca un ideal să fie propriu, este necesar şi suficient ca să nu conţină nici un element inversabil, căci dacă ar exista un astfel de element, fie el x_0, atunci $x_0^{-1}\, x_0 = e$ ar aparţine idealului, deci idealul ar conţine unitatea şi n-ar mai fi propriu, ceea ce este absurd. Dacă $\bar{M}$ n-ar fi propriu, $\bar{M} = A$, şi, cum mulţimea elementelor inversabile este deschisă (după cum am văzut), rezultă, din definiţia aderenţei unei mulţimi, că M ar conţine elemente inversabile, deci n-ar fi propriu, ceea ce este iarăşi absurd!

Un omomorfism al algebrei A în C (numerele complexe) este o aplicaţie $h\colon A \to C$ cu următoarele proprietăţi: h este liniară şi multiplicativă, i.e. $h(xy) = h(x)h(y)$. În cele ce urmează vom presupune că h nu e identic nul, fără a mai menţiona aceasta. Un fapt remarcabil este că orice omomorfism al unei algebre Banach rezultă automat continuu (după cum ştim, liniaritatea, cu excepţia cazului finit dimensional, este insuficientă pentru a garanta continuitatea), ceea ce rezultă din faptul următor: pentru orice $a \in A$, $h(a)$ aparţine spectrului $\sigma(a)$ al lui a. Aceasta se demonstrează astfel: mai întîi, cum $e = e^2$, $h(e) = h(e^2) = h(e)^2$, deci $h(e) = 1$ sau $h(e) = 0$, dar acest ultim caz ar implica $h = 0$, căci $x = ex$, deci $h(x) = h(e)h(x) = 0$ pentru orice $x \in A$, contrar ipotezei că $h \not\equiv 0$; prin urmare $h(e) = 1$. Dacă $h(a) \notin \sigma(a)$ conform definiţiei spectrului, aceasta ar însemna că $b = (h(a)e-a)^{-1}$ există, deci $(h(a)e-a)b = e$; aplicăm pe h: $h[(h(a)e-a)b] = h(e)$. Ori $h[(h(a)e-a)] = [h(a)h(e) - h(a)]h(b) = 0$ căci $h(e) = 1$. Am obţinut o contradicţie, $0 = 1$, absurd, deci $h(a) \in \sigma(a)$. Dar cum $\sigma(a)$ este inclus în cercul de rază $\|a\|$, rezultă că $|h(a)| \leqslant \leqslant \|a\|$, deci $\|h\| \leqslant 1$. De fapt, $h(e) = 1$, deci $\|h\| = = 1$.

Există o strînsă legătură între omorfismele nenule ale algebrei Banach (comutative, un element unitate) A şi idealele sale maximale. Pentru aceasta vor fi necesare cîteva pregătiri, referitoare la algebrele-cît.

Fie A o algebră comutativă, J un ideal propriu al ei; relaţia $x-y \in J$ este o relaţie de echivalenţă şi mulţimea claselor de echivalenţă faţă de această relaţie este mulţimea-cît A/J. Notînd cu $x \to \varphi(x)$ aplicaţia care asociază fiecărui $x \in A$ clasa sa, se introduce pe N_J o structură de algebră în modul următor: $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$, $\lambda\varphi(x) = = \varphi(\lambda x)$ şi $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$. Faptul că definiţiile operaţiilor sînt coerente, este un exerciţiu simplu pe care-l lăsăm în seama cititorului, atrăgînd atenţia asupra faptului că proprietatea lui J de a fi un ideal intervine atunci cînd se verifică corectitudinea definiţiei înmulţirii.

Aplicația φ astfel definită este, desigur, un omomorfism de la A în A/J al cărui nucleu * va fi exact J. Dar A are element unitate e, $\varphi(e)$ va fi unitate în A/J și, ceea ce este foarte important: *A/J este corp dacă și numai dacă J este un ideal maximal.* Pentru demonstrație, fie $x \in A$, $x \notin J$ și fie $I = \{ax + y,\ a \in A,\ y \in J\}$. Evident că I este un ideal diferit de J (căci $x \in I$); deci dacă J este maximal, $I = A$, deci pentru un anumit a și un anumit y, $ax + y = e$. Aplicăm pe φ: $\varphi(a)\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(e)$; dar $\varphi(y) = 0$, deci $\varphi(a)\varphi(x) = \varphi(e)$ și deci orice element nenul al lui A/J este inversabil, adică A/J este corp. Dacă J nu este maximal, el este conținut într-un ideal maximal și este suficient să alegem un element x aparținînd acestui ideal maximal, cu $x \notin J$. Atunci idealul I, construit mai înainte, va fi propriu (căci va fi conținut — poate va fi egal — cu idealul maximal de mai sus) deci $e \notin I$ și deci $\varphi(x)$ nu va fi inversabil în A/J și din construcție $\varphi(x) \neq 0$, prin urmare A/J nu este corp dacă J nu este maximal.

Considerațiile făcute mai sus au un caracter pur algebric. Dacă A este însă o algebră Banach, se poate spune mai mult. Anume, dacă J este un ideal închis, pe A/J se consideră norma $\|\varphi(x)\| = \inf\{\|x + y\|,\ y \in J\}$ și se verifică că A/J (care este o algebră comutativă) este chiar o algebră Banach comutativă. Să facem verificările. Mai întîi, dacă $x \in J$, $\|\varphi(x)\| = 0$ (de ce?). Dacă $x \in J$, $\|\varphi(x)\| > 0$, căci J este închis; că $\|\varphi(x)\|$ este într-adevăr o normă se verifică plecînd de la definiții; la fel și faptul că A/J este complet. Să arătăm că A/J este o algebră Banach. Fie $x_1, x_2 \in A$ și fie $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar. Alegem y_1 și $y_2 \in J$ astfel ca $\|x_i + y_i\| < \|\varphi(x_i)\| + \varepsilon$ $(i = 1,2)$. Dar $(x_1 + y_2)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + J$, deci

$\|\varphi(x_1x_2)\| \leqslant \|(x_1+y_1)(x_2+y_2)\| \leqslant \|x_1+y_1\|\ \|x_2 + y_2\| \leqslant (\|\varphi(x_1)\| + \varepsilon)(\|\varphi(x_2)\| + \varepsilon)$, ε fiind arbitrar; rezultă că $\|\varphi(x_1x_2)\| \leqslant \|\varphi(x_1)\|\ \|\varphi(x_2)\|$, adică ceea ce căutam. Putem demonstra acum următoarea

* Se numește nucleul unui omomorfism φ mulțimea punctelor x ale căror imagini prin φ sînt zero, i.e. mulțimea $\{x \mid \varphi(x) = 0\}$

Teoremă. Fiecărui ideal maximal al lui A îi corespunde un omomorfism nenul al lui A în C, şi, reciproc, oricărui astfel de omomorfism îi corespunde un ideal maximal al lui A.

Demonstraţie. Fie M un ideal maximal; atunci A/M este un corp Banach, deci, conform teoremei lui Gelfand-Mazur, există un izomorfism $j: A/M \to C$. Este suficient să luăm omomorfismul compus: $h = j \cdot \varphi$ definit pe A cu valori în C; M va fi nucleul acestui omomorfism şi astfel, am asociat oricărui ideal maximal un omomorfism al cărui nucleu să fie chiar M. Reciproc, fiind dat un omomorfism nenul h, fie N nucleul său, adică $N = \{x \mid h(x) = 0\}$. N este un ideal (căci dacă $x \in N$ şi y este un element arbitrar din A, atunci $h(yx) = h(y)\, h(x) = h(y) \cdot 0 = 0$, deci $y \in N$). Dar, mai mult, N este chiar maximal, căci să presupunem că ar exista un ideal N', cu $N \subset N'$; atunci $h(N')$ va fi de asemenea un ideal în C şi cum C este corp, rezultă că $h(N')$ poate fi doar zero sau întreg C. Dacă $h(N') = \{0\}$ rezultă că $N' = N$; în cazul contrar dacă $h(N') = C$, există un element $y \in N'$ astfel ca $h(y) = 1$; dar cum $h(e) = 1$, rezultă că $h(y-e) = 0$, prin urmare $y-e \in N'$, adică $y-e = x$, cu $x \in N$, deci $e = y-x \in N'$ şi deci $N' = A$. Se vede astfel că N este maximal şi demonstraţia este terminată.

Din această corespondenţă între ideale maximale şi omomorfisme se pot deduce o serie de consecinţe importante. Ne vom mărgini la următoarea: *condiţia necesară şi suficientă ca un element* $a \in A$ *(*A *= algebră Banach comutativă, cu element unitate) să fie inversabil este ca a să nu aparţină nici unui ideal maximal.*

Pentru ca a să fie inversabil este necesar şi suficient ca $\lambda = 0$ să nu aparţină lui $\sigma(a)$ (spectrul lui a) (căci, conform definiţiei, pentru $\lambda \notin \sigma(a)$, $(a - \lambda e)^{-1}$ există, deci dacă $0 \notin \sigma(a)$, a^{-1} există).

Pe de altă parte, conform teoremei demonstrate mai înainte, afirmaţia că a nu aparţine nici unui ideal maximal, este echivalentă cu afirmaţia că a nu aparţine nucleului nici unui omomorfism nenul al algebrei, deci că $h(a) \neq 0$ pen-

tru orice h nenul. Rezultatul pe care-l avem în vedere se poate deci enunța astfel: condiția necesară și suficientă pentru ca a să fie inversabil este $h(a) \neq 0$ pentru orice omomorfism nenul h al lui A.

Propoziția va fi demonstrată dacă vom dovedi că $\lambda \in \sigma(a)$ atunci și numai atunci cînd există un omomorfism nenul h al lui A, astfel ca $h(a) = 0$. Una din implicații ($h(a) \in \sigma(a)$) a fost demonstrată mai înainte. Dacă $\lambda \in \sigma(a)$, atunci $a-\lambda e$, nu este inversabil; fie idealul generat de $(a-\lambda e)$, i.e. idealul ale cărui elemente sînt de forma $(a-\lambda e)y$, cu y elemente arbitrare din A. Acest ideal este propriu, căci nu conține unitatea (altfel, $a-\lambda e$ ar fi inversabil), deci este conținut într-un ideal maximal, care, conform teoremei, va fi nucleul unui omomorfism h; deci $h(a-\lambda e) = 0$ sau $h(a) = \lambda$ căci $h(e) = 1$. Deci dacă $h(a) \neq 0$ pentru orice h, 0 nu poate aparține lui σ (a), adică a este inversabil.

Ajunși aici, putem trece și la aplicații: una din acestea, teorema lui Wiener (de fapt o teoremă mai generală teorema lui Wiener-Lévy, dar de aceeași natură) a stat la baza teoriei lui Gelfand și ilustrează, în mod simplu, cum anumite aspecte algebrice stau ascunse sub unele enunțuri în aparență de analiză pură.

Fie A algebra tuturor funcțiilor cu valori complexe f definite pe cercul $|z| = 1$, ce se pot reprezenta sub forma $f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, cu $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, Pe A se consideră norma $\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$ și este ușor de văzut că A este complet față de această normă. Dar A este și o algebră față de înmulțirea punctuală. Dacă $f(e^{i\theta}) = \sum c_n e^{in}$ și $g(e^{i\theta}) = \sum b_n e^{in}$ sînt elemente din A, atunci $f(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta}) = \sum_n \left(\sum_{k \leqslant n} c_{n-k} b_k\right) e^{in}$ deci

$$\|fg\| = \sum_n \left|\sum c_{n-k} b_k\right| \leqslant \sum_k |b_k| \sum_n |c_{n-k}| = \|f\|\ \|g\|.$$

Algebra A este evident comutativă și funcția identic egală cu 1, pe care o vom nota, prin abuz, cu 1, aparține

lui A, şi $\|1\| = 1$, deci A este o algebră Banach comutativă, cu element unitate.

Să notăm cu $f_0(e^{i\theta})$ funcţia $e^{i\theta}$ (care, desigur, aparţine lui A). Dar şi $\frac{1}{f_0} = e^{-i\theta} \in A$, şi $\|f_0^n\| = 1$ pentru $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Fie acum h un omomorfism al lui A în C şi fie $\lambda = h(f_0)$. Cum $\|h\| \leqslant 1$, vom avea $h(f_0^n) = |\lambda^n| \leqslant \|f_0^n\| = 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, deci $|\lambda| = 1$, sau, cu alte cuvinte, $\lambda = e^{i\alpha}$, deci, în definitiv, $h(f_0) = e^{i\alpha}$. Am arătat deci că fiecărui omomorfism nenul h îi corespunde un punct $e^{i\alpha}$ de pe cercul $|z| = 1$, astfel ca $h(f_0) = e^{i\alpha}$. Dar atunci $h(f_0^n) = e^{in\alpha} = f_0^n(e^{i\alpha})$ şi dacă $f = \sum c_n e^{in\theta}$, putem scrie $f = \sum c_n f_0^n$. Seria convergînd în A, şi h fiind continuu, vom avea $h(f) = f(e^{i\alpha})$. Să presupunem acum că $f(e^{i\theta})$ nu se anulează pe cercul $|z| = 1$, i.e. $f(e^{i\theta}) \neq 0$ pentru orice θ real. Atunci, pentru orice omomorfism h, $h(f) \neq 0$, căci $h(f) = f(e^{i\alpha})$ cu α real. Dar pe baza teoremei demonstrate mai înainte rezultă că f nu aparţine nici unui ideal maximal, deci este inversabil în A şi deci $\frac{1}{f} \in A$, adică $\frac{1}{f} = \sum d_n e^{in\theta}$, cu $\sum |d_n| < \infty$. Aceasta este tocmai teorema lui Wiener, demonstrată de acesta prin metode „clasice" de analiză.

Cealaltă aplicaţie se referă la o altă algebră importantă de funcţii continue. Anume, dacă notăm cu $U = \{z \mid |z| < 1\}$ şi cu $\bar{U}$ închiderea lui U ($\bar{U}$ va fi discul unitate), algebra pe care o vom considera va fi algebra $A(U)$ a funcţiilor continue pe $\bar{U}$, ale căror restricţii la U sînt olomorfe. Vom demonstra următoarea

Teoremă. Fie $f_1, \ldots, f_n \in A(U)$ cu proprietatea că, pentru orice $z \in \bar{U}$, $|f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)| > 0$.

Atunci există $g_1, \ldots, g_n \in A(U)$, astfel încît $\sum f_i(z) g_i(z) = 1$ pentru orice $z \in \bar{U}$.

Demonstraţia va utiliza ceea ce ştim privind algebrele Banach. (Este evident că $A(U)$, dotată cu norma $\|f\| =$

$= \sup_{z \in \bar{U}} |f(z)|$ este o algebră Banach, căci limitele uniforme de funcții olomorfe sînt olomorfe).

Fie I idealul generat de $f_1, \ldots, f_n$, adică mulțimea elementelor de forma $\sum_1^n f_i g_i$, cu g_i elemente arbitrare din $A(U)$. Afirmația teoremei revine la aceea că $1 \in I$, și, după cum știm, pentru aceasta este necesar și suficient ca I să nu fie inclus în nici un ideal maximal, sau, ceea ce este echivalent, ca $f_1, \ldots, f_n$ să nu se găsească simultan în nucleul vreunui omomorfism h al algebrei noastre, deci să nu existe nici un h (omomorfism nenul al lui $A(U)$ în C), astfel ca $h(f_i) = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Trebuie deci să determinăm omomorfismele algebrei $A(U)$. Pentru aceasta vom remarca mai întîi că polinoamele în z sînt dense în $A(U)$. Într-adevăr, U fiind compact, orice $f \in A(U)$ este uniform continuu pe U. Fixăm pe f oarecare din $A(U)$ și un $\varepsilon > 0$ arbitrar; continuitatea uniformă revine la aceea că există un număr $r < 1$, astfel încît $|f(z) - f(rz)| < \varepsilon$ pentru orice $z \in U$; dezvoltăm pe $f(rz)$ în serie de puteri care converge uniform către $f(rz)$ pentru $z \in U$; n-avem decît să considerăm polinomul obținut limitînd dezvoltarea la un număr suficient de termeni. Acest polinom, pe baza inegalității $|f(z) - f(rz)| < \varepsilon$, va aproxima pe $f(z)$ cu 2ε să zicem (ε fiind arbitrar, aceasta este suficient).

Acum repetăm oarecum raționamentul făcut la teorema lui Wiener. Fie $f_0(z) = z$; evident că $f_0 \in A(U)$; cine este $\sigma(f_0)$? Conform definiției, este mulțimea acelor λ pentru care $f_0 - \lambda \cdot 1$ nu este inversabil; aceasta revine la aceea că $z - \lambda \cdot 1$ nu este inversabil; este clar că, pentru orice $\lambda \notin \bar{U}$, $z - \lambda e$ nu este inversabil și că, pentru $\lambda \notin \bar{U}$, $z - \lambda e$ este inversabil ca funcție din $A(U)$. Deci $\sigma(f_0) = \bar{U}$. Fie acum h un omomorfism oarecare (nenul) al lui $A(U)$ în C. Atunci $h(f_0) \in \sigma(f_0)$, deci există un număr $\alpha \in \bar{U}$, astfel ca $h(f_0) = \alpha$. De aici, $h(f_0^n) = \alpha^n = f_0^n(\alpha)$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ Dacă $P = \sum_{n=1}^{e} c_n z^n$ este un polinom oarecare, $P = \sum c_n f_0^n$, deci

$h(P) = P(\alpha)$. Continuitatea lui h şi faptul că polinoamele sînt dense, ne asigură că $h(f) = f(\alpha)$ pentru orice $f \in A(U)$; $\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)| > 0$ pentru orice $z \in U$ implică faptul că, pentru $z = \alpha$, există cel puţin un indice i, astfel încît $|f_i(\alpha)| > 0$, deci $h(f_i) \neq 0$. Cu alte cuvinte, pentru orice h există un indice i, astfel ca $h(f_i) \neq 0$, ceea ce, după cum am văzut, demonstrează teorema.

Putem trece acum la teorema de reprezentare (datorită lui I. M. Gelfand) a algebrelor Banach comutative cu element unitate, teoremă foarte importantă şi extrem de frumoasă. Ideea remarcabilă a lui Gelfand a fost de a considera, fiind dată o algebră Banach comutativă, o topologie naturală pe mulţimea omomorfismelor nenule ale algebrei respective, sau, ceea ce este acelaşi lucru (după cum ştim) pe mulţimea idealelor sale maximale. Pentru aceasta, fie A o algebră Banach comutativă, cu element unitate; A va fi deci un spaţiu Banach şi dacă notăm cu S mulţimea omomorfismelor nenule ale lui A în C, aceste omomorfisme sînt în mod automat continue, de normă 1, deci S va fi o submulţime a sferei unitate a dualului lui A, adică o submulţime a sferei unitate a spaţiului funcţionalelor liniare şi continue pe A.

După cum am văzut, atunci cînd am considerat sfera unitate a dualului unui spaţiu Banach, acesta este slab compactă, adică este compactă faţă de topologia slabă pe dual.

Ce se întîmplă în cazul nostru? Mulţimea omomorfismelor fiind o submulţime a unei mulţimi slab compacte din dual, pentru a dovedi că-i compactă, este suficient a arăta că este închisă faţă de topologia slabă. Aceasta revine însă la următoarele: dacă notăm cu S mulţimea omomorfismelor nenule ale algebrei A, trebuie arătat că orice punct aderent (din A') mulţimii S este un omomorfism. Dar ştim deja că un astfel de punct aderent este o aplicaţie liniară (s-a găsit aceasta cînd s-a arătat că sfera unitate din dual este slab compactă), rămîne doar de arătat multiplicativitatea. Fie deci $h_0 \in \bar{S}$ (închiderea luată în topologia slabă). Un sistem fundamental de vecinătăţi al lui h_0 va fi format

din mulțimile $V(h_0; \varepsilon, x_1,\dots, x_n)$, unde ε parcurge numerele pozitive nenule, iar $x_1,\dots, x_n$ parcurge toate sistemele finite (deci n variază) de elemente arbitrare din A. Faptul că h_0 aparține lui $\bar{S}$ implică faptul că în orice astfel de vecinătate există cel puțin un element aparținînd lui S. Faptul că h_0 este multiplicativ înseamnă, evident, că $h_0(ab) = h_0(a)h_0(b)$ pentru orice element a și b din A. Fixăm pe a și b (de altfel perfect arbitrare) și vom evalua diferența $h_0(ab) - h(a)h_0(b)$. Pentru aceasta alegem o vecinătate $V(h_0; \varepsilon, x_1,\dots,x_n)$ de tip special, anume $V(h_0; \varepsilon, a, b, ab)$, și alegem un element (care există, după cum am văzut) $h \in S \cap V(h_0, \varepsilon, a, b, ab)$. Vom avea

$$h_0(ab)-h_0(a)h_0(b)| \leqslant |h_0(ab)-h(ab)| + |h(ab)-h_0(a)h_0(b)| \leqslant \leqslant \varepsilon + |h(a)h(b) - h_0(a)h_0(b)|\,.$$

Dar scriind

$$h(a)h(b)-h_0(a)h_0(b) = h(a)(h(b)-h_0(b)) + h_0(b)\,(h(a)-h_0(a)),$$

avem

$$|\,h(a)h(b)-h_0(a)h_0(b)\,| \leqslant |\,h(a)\,|\;|\,h(b)-h_0(b)\,| + +|\,h_0\,(b)\,|\;\;|h(a) - h_0(a)\,|.$$

Acum $|\,h(a)\,| \leqslant \|\,a\,\|$, $|\,h(b)\,| \leqslant \|\,b\,\|$, iar cum $h \in \in V(h_0; \varepsilon, a, b, ab)$, rezultă că $|\,h(b) - h_0(b)\,|$ și $|\,h(a)-h_0(a)\,|$ sînt mai mici ca ε.

În definitiv

$$|h_0(ab)-h_0(a)h_0(b)| < \varepsilon\,(1 +\|\,a\,\| +\|\,b\,\|)$$

și cum ε este arbitrar, rezultă

$$h_0(ab) = h_0(a)h_0(b).$$

Dar h_0 este evident nenul (este oare aceasta atît de evident?), prin urmare S rezultă închis, deci compact.

Spațiul S (utilizăm cuvîntul spațiu pentru că pe S s-a introdus o topologie !) se numește *spectrul* algebrei A. O dată topologizat spectrul (numit și spațiul idealelor maximale), să asociem fiecărui element $a \in A$ funcția definită astfel: $\hat{a}(h) = h(a)$, cu $h \in S$. *Funcția* $\hat{a}$ *este continuă pe* S. Demonstrație; fie $h_0 \in S$ fixat, $\varepsilon > 0$ dat. Trebuie arătat că există o vecinătate V a lui h_0 în S, astfel ca, pentru orice $h \in V$, $|\,\hat{a}(h)-\hat{a}(h_0)\,| < \varepsilon$. Dar pentru aceasta este

suficient de luat $V = V(\varepsilon, h_0, a) = \{h \in S \mid |h(a) - h_0(a)| < \varepsilon\}$. Cum $\hat{a}(h) - \hat{a}(h_0) = h(a) - h_0(a)$, afirmaţia este evidentă.

Cu alte cuvinte, fiecărui element a al algebrei noastre Banach A (comutative şi cu element unitate) i s-a asociat o funcţie continuă $\hat{a}$, definită pe spectrul lui A. Avem astfel o aplicaţie definită pe A, cu valori în $C(S)$ (= algebra funcţiilor continue pe spectrul S, cu norma uzuală). Această aplicaţie este continuă, căci $\|\hat{a}\| = \sup |\hat{a}(h)| = \sup |h(a)| \leqslant \leqslant \|a\|$, deoarece fiecare h este de normă 1. Funcţia $\hat{a}$ se numeşte *transformata lui Gelfand* a elementului a.

Se arată (nu este greu) că $\|\hat{a}\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ (existenţa limitei din membrul drept se demonstrează), iar norma $\|\hat{a}\|$ se numeşte *norma spectrală* a lui a. Aplicaţia $a \to \hat{a}$ este evident un omomorfism de algebre. Ea va fi o injecţie dacă din $\hat{a} = 0$ rezultă $a = 0$. Dar cum $\hat{a} = 0$ implică $h(a) = = 0$ pentru orice $h \in S$, aceasta înseamnă că a aparţine intersecţiei tuturor nucleelor omomorfismelor lui A, deci a aparţine intersecţiei tuturor idealelor maximale. Intersecţia tuturor idealelor maximale se numeşte radicalul algebrei A; dacă acest radical se reduce la idealul $\{0\}$, se spune că A este semisimplă. Deci, dacă notăm cu A algebra transformatelor lui Gelfand $\hat{a}$, A este izomorfă cu $\hat{A}$ dacă şi numai dacă A este semisimplă. Izomorfismul despre care vorbim va fi în general doar un izomorfism algebric, nu neapărat topologic, aplicaţia $\hat{a} \to a$ nefiind în mod necesar continuă. Se arată uşor că o condiţie necesară şi suficientă ca aplicaţia $\hat{a} \to a$ să fie bicontinuă, este ca norma algebrei A să verifice următoarea condiţie simplă: $\|a\|^2 \leqslant K \|a^2\|$ pentru orice $a \in A$, constanta K nedepinzînd de a (dacă $K = 1$, atunci A şi $\hat{A}$ vor fi izometrice).

Teorema obţinută este remarcabilă, între altele deoarece ne arată că în anumite condiţii generale algebrele Banach comutative pot fi reprezentate ca algebre de funcţii continue pe un compact. Bineînţeles că se ridică imediat o serie de probleme. De pildă: cînd A coincide cu algebra tuturor funcţiilor continue definite pe spectrul său? sau: dacă A

şi B sînt algebre izomorfe (algebric) sînt oare spectrele lor omeomorfe?

În cele două exemple considerate mai înainte am determinat şi forma idealelor maximale, deci am determinat spectrele algebrelor respective, care sînt spaţii topologice asociate natural algebrelor şi cu topologii „sănătoase". În general însă spectrul poate fi un spaţiu compact cu o structură foarte complicată. Aceasta nu trebuie să ne mire ! Generalitatea rezultatului, trebuie plătită într-un fel, fenomen destul de general în matematică. Totuşi, rolul şi aplicaţiile teoremei de reprezentare a lui Gelfand sînt extrem de importante.

Am văzut deci că studiul algebrelor Banach conduce la studiul algebrelor de funcţii continue definite pe spaţii compacte. Dar studiul acestor algebre a pornit şi de la nevoile analizei, în special de la probleme de aproximare.

Probleme de aproximare

O teoremă clasică a lui K. Weierstrass afirmă că orice funcţie continuă pe un interval compact poate fi aproximată uniform prin polinoame. Cu alte cuvinte, funcţia continuă $f(x)$ fiind definită, să zicem, pe $[0,1]$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom $P_\varepsilon(x)$ care să verifice relaţia $\|f - P_\varepsilon\| < \varepsilon$, norma fiind luată pe $[0,1]$, i.e. $\|f-P_\varepsilon\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_\varepsilon(x)|$. Teorema aceasta se poate demonstra în numeroase feluri. Un mod „efectiv" de a găsi un şir de polinoame, care să conveargă uniform către $f(x)$, a fost găsit de matematicianul sovietic S. Bernstein. Acesta a arătat că polinoamele $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1 - x)^{n-k} x^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ aproximează oricît de bine pe $f(x)$, uniform pe $[0,1]$ (tre-

cerea de la intervalul [0,1] la un interval oarecare (mărginit) $[a, b]$ se face imediat printr-o schimbare simplă de variabilă). Teorema lui Weierstrass mai poate fi formulată şi astfel: algebra tuturor polinoamelor este densă în algebra funcţiilor continue pe orice interval compact.

În cazul teoremei lui Weierstrass, observaţia (care nu intervine, de pildă, în demonstraţia lui Bernstein, nici în cea originală a lui Weierstrass) că polinoamele formează o algebră, sugerează încercarea de a obţine un enunţ asemănător înlocuind:

a) intervalul printr-un spaţiu compact oarecare K,

b) algebra polinoamelor cu o altă subalgebră a lui $C(K)$ verificînd condiţii convenabile.

Se mai cunoştea un rezultat similar, datorat de asemenea lui K. Weierstrass (şi care se poate deduce din teorema de aproximare prin polinoame), referitor la posibilitatea aproximării uniforme a funcţiilor periodice prin polinoame trigonometrice.

Matematicianul american M. H. Stone a reuşit să obţină în 1948 o astfel de generalizare, demonstrînd următoarea teoremă, cunoscută sub numele de teorema Weierstrass-Stone:

Teoremă. Fie K un spaţiu compact, A o algebră de funcţii continue cu valori reale, definite pe K şi cu proprietăţile:

a) funcţia $1 \in A$,

b) A „separă" punctele lui K, adică, pentru orice pereche de puncte distincte p_1 şi p_2 ale lui K, există o funcţie $f \in A$ astfel ca $f(p_1) \neq f(p_2)$.

Concluzie. Algebra A este densă în $C_R(K)$ (faţă de norma $\|f\| = \sup_K |f(x)|$, $C_R(K)$ fiind algebra funcţiilor continue pe K, cu valori reale.

Este evident că atît algebra polinoamelor, cît şi cea a polinoamelor trigonometrice verifică cele două condiţii.

În enunţul de mai sus apare o restricţie importantă, anume cerinţa ca algebra A să cuprindă doar funcţii cu va-

lori reale. Vom vedea în ce măsură se poate ridica această restricție, care ține nu de vreo insuficiență a demonstrației, ci de însăși natura lucrurilor. Să presupunem, pentru moment, teorema demonstrată și să considerăm o algebră B, de funcții continue, cu valori complexe definite pe K, care să verifice condițiile a) și b) ale teoremei și care în plus să posede proprietatea următoare:

c) dacă $f \in B$, atunci și $\bar{f} \in B$ ($\bar{f}$ este funcția $x \to \overline{f(x)}$, unde $\overline{f(x)}$ este conjugatul complex al numărului $f(x)$). Se spune că B este *autoadjunctă.* Vom arăta (presupunînd demonstrată, repetăm, teorema lui Stone-Weierstrass) că dacă B posedă proprietățile a), b), c), atunci B coincide cu $C(K)$ (este evident că aceste trei condiții sînt necesare pentru ca $B = C(K)$). Fie A algebra funcțiilor reale f ce aparțin lui B. Este clar că A posedă proprietatea a). În ceea ce privește pe b, (separarea punctelor) fie $t_1 \neq t_2$ două puncte din K. Atunci există $f \in B$, $f(t_1) \neq (t_2)$, ceea ce implică $\operatorname{Re} f(t_1) \neq \operatorname{Re} f(t_2)$, sau $\operatorname{Im} f(t_1) \neq \operatorname{Im} f(t_2)$. Dar $\operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{2} \in B$, și, fiind o funcție reală, aparține lui A; la fel și $\operatorname{Im} f = \frac{f-\bar{f}}{2i} \in B$, aceasta datorită faptului că B este autoadjunctă. Teorema lui Stone-Weierstrass spune că în acest caz $A = C_R(K)$. Dar atunci, pentru orice $f \in C(K)$, $\operatorname{Re} f$ și $\operatorname{Im} f$ aparțin lui $C_R(K)$, deci lui A și în definitiv $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \in B$, ceea ce trebuia arătat.

Cu alte cuvinte, pentru ca o algebră B a lui $C(K)$, verificînd proprietățile a), b) și c), să fie densă în $C(K)$, este necesar și suficient ca ea să fie autoadjunctă.

Vom da acum o demonstrație „analitică“ * a teoremei lui Stone-Weierstrass.

Fie deci K un spațiu compact; dacă f și $g \in C_R(K)$, atunci $f \vee g = \max(f, g)$ și $f \wedge g = \min(f, g)$ aparțin de asemenea lui $C_R(K)$. Vom demonstra două leme.

---

* Există o demonstrație „geometrică“ bazată pe teorema lui Krein-Milman.

1° Fie A o familie de funcții continue, cu valori reale, definite pe K, cu proprietatea că dacă f, $g \in A$, atunci $f \vee g$, $f \wedge g \in A$. Concluzie: orice funcție continuă pe K, care poate fi aproximată în orice pereche de puncte ale lui K prin funcții din A, poate fi aproximată uniform pe K prin funcții din A (i.e. aparține lui $\bar{A}$).

Demonstrație. Fie f continuă, cu proprietatea că, pentru orice două puncte p, $q \in K$ și orice $\varepsilon > 0$, există o funcție $f_{p,q} \in A$, astfel ca $|f_{p,q}(p) - f(p)| < \varepsilon$, $|f_{p,q}(q) - f(q)| < \varepsilon$. Fie $U_{p,q} = \{ x | f_{p,q}(x) < f(x) + \varepsilon \}$ și $V_{p,q} = \{ x | f_{p,q}(x) > f(x) - \varepsilon \}$. Fixăm pe q și facem pe p să varieze; mulțimile deschise $U_{p,q}$ acoperă pe K, deci există un număr finit de astfel de mulțimi care acoperă pe K. Prin urmare aceste mulțimi vor fi de forma $U_{p_1,q}$, $U_{p_2,q}$, ..., ..., $U_{p_j,q}$. Luînd acum funcția $f_q = \min (f_{p_1,q}, f_{p_2,q}, \ldots, f_{p_j,q})$, f_q este continuă (și aparține lui A), $f_q(x) < f(x) + \varepsilon$ pe K și $f_q > f - \varepsilon$ pe mulțimea $V_q = \bigcap_{i=1}^{j} V_{p_i,q}$.

Făcînd acum să varieze q, mulțimile deschise V_q formează o acoperire a lui K; extragem o acoperire finită; aceasta ne furnizează funcțiile $f_{q_1}, \ldots, f_{q_p}$; luînd $f' = \sup (f_{q_1}, \ldots, f_{q_p})$, obținem o funcție ce aparține lui A și care verifică relația $f - \varepsilon < f' < f + \varepsilon$ pe K, q.e.d.

2° Orice algebră A de funcții continue, cu valori reale, definite pe K, care este închisă în normă (se mai spune: „uniform închisă") are proprietatea că din $f, g \in A$ rezultă că $f \vee g$ și $f \wedge g$ aparțin de asemenea lui A.

Demonstrație. Să remarcăm că $f \vee g = \max (f, g)$ se poate scrie și sub forma $f \vee g = \frac{1}{2} (f + g + |f - g|)$; în mod analog $f \wedge g = \frac{1}{2} (f + g - |f - g|)$.

Deci va fi suficient să arătăm că $f \in A$ implică $|f| \in A$.

Împărţind cu o constantă, putem presupune că $|f| = \sup_K |f(x)| \leqslant 1$.

Vom folosi dezvoltarea Taylor a funcţiei $(t + \varepsilon^2)^{1/2}$ în jurul punctului $t = \frac{1}{2}$.

Această serie converge uniform pe intervalul $[0,1]$. Notînd $t = x^2$, există un polinom $P(x^2)$, astfel ca $|P(x^2) - (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}| < \varepsilon$. ($\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, dar fixat) pentru $x \in [-1, +1]$ (este suficient să luăm destul de mulţi termeni de dezvoltare).

De aici rezultă că $|P(0)| < 2\varepsilon$, deci $Q(x^2) = P(x^2) - P(0)$ verifică inegalitatea $|Q(x^2) - (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}| < 3\varepsilon$. Dar $||x| - (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}| < \varepsilon$, prin urmare $|Q(x^2) - |x|| < 4\varepsilon$ pe $[-1, +1]$. Cum $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$, Q nu conţine termeni constanţi, deci $Q(f^2) \in A$ dacă $f \in A$. (Nu ştim dacă algebra A conţine pe 1 şi de aceea este nevoie ca Q să nu aibă termeni constanţi).

În definitiv teorema lui Stone-Weierstrass rezultă imediat din aceste două leme, căci A verifică condiţiile lemei 2° şi tot ce trebuie arătat este (pentru a ne plasa în condiţiile lemei 1°) că dacă A separă punctele (deci cu atît mai mult $\bar{A}$) şi dacă conţine constantele, atunci orice funcţie continuă pe K poate fi aproximată, în orice pereche de puncte din K, prin funcţii din A. Fie $x \neq y$ două puncte din K. Ştim că există o funcţie $f \in A$, astfel încît $f(x) \neq f(y)$, $f(x)$ şi $f(y)$ fiind, ambele, nenule. Fie apoi g o funcţie continuă pe K, $g(x) = a$, $g(y) = b$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, trebuie găsită o funcţie $f_1 \in A$, astfel încît $|f_1(x) - g(x)| < \varepsilon$ şi $|f_1(y) - g(y)| < \varepsilon$. Procedăm în modul următor: luăm drept f_1 funcţia $\alpha f + \beta f^2$; constantele α şi β le determinăm cerînd ca $f_1(x) = a$ şi $f_1(y) = b$, ceea ce revine la sistemul liniar de ecuaţii (necunoscutele sînt α şi β):

$$\alpha f(x) + \beta f^2(x) = a,$$
$$\alpha f(y) + \beta f^2(y) = b,$$

care se rezolvă imediat (aici este esenţial faptul că $f(x) \neq 0$, $f(y) \neq 0$). Teorema este complet demonstrată.

În acest paragraf vom demonstra mai întîi un rezultat legat de algebra $L^1(R^1)$ și anume faptul că idealele închise în algebra $L^1(R^1)$ coincid cu subspațiile lui L^1 invariante la translații. Pentru aceasta vom avea nevoie de cîteva rezultate ajutătoare.

1° Dacă notăm cu $f_t(x)$ funcția $f(x+t)$, atunci aplicația $t \to f_t$ definită pe R^1, cu valori în L^1 este uniform continuă.

Demonstrație. Norma diferenței $f_{t_1} - f_{t_2}$ va fi $\|f_{t_1} - f_{t_2}\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t_1) - f(x+t_2)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z) - f(z+t_2-t_1)|\, dz$ deci totul revine la a arăta că pentru orice $f \in L^1$, $\lim\limits_{t\to 0} \|f - f_t\| = 0$.

Proprietatea aceasta rezultă imediat, dacă f este o funcție continuă cu suport compact, și, cum mulțimea acestor funcții este densă în L^1, rezultatul se obține repede aproximînd un element f oarecare din L^1 printr-o funcție continuă g cu suport compact, scriind că $f - f_t = f - g + g - g_t + g_t - f_t$, aplicînd inegalitatea triunghiului și observînd că $\|g_t - f_t\| = \|g - f\|$.

2° Dacă φ este o funcție din $C_0^\infty(R^1)$, $\int \varphi dx = 1$, suportul lui φ fiind intervalul $[-1, +1]$, atunci șirul $\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ are proprietatea că $\|\varphi_n * f - f\| \to 0$ pentru orice f din L^1.

3° Dacă $f \in L^1$, atunci $f_s * f_t = f * f_{s+t} = f_{s+t} * f$ (verificarea este un calcul elementar).

Fie acum I un ideal închis din $L^1(R^1)$. Vom arăta că I este închis față de translații, adică I conține, o dată cu f, toate translatatele sale f_t. Fie $f \in I$ și φ_n șirul considerat la punctul 2°. Atunci, notînd $\varphi_{n,t}(x) = \varphi_n(x+t)$, $\varphi_{n,t} * f$

aparține lui I, pentru orice n (nu uitați: în L^1 înmulțirea este operația de convoluție). Dar $\varphi_{n,t} * f = \varphi_n * f_t$ (vezi 3°) și cum I este închis, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n * f_t$, care este tocmai f_t, aparține lui I.

Reciproc, fie M un subspațiu închis al lui L^1, care, o dată cu o funcție f, conține și toate translatatele sale f_t. Vom arăta că M este un ideal închis al lui L^1. Pentru ca M să fie un ideal este suficient (M fiind un subspațiu) ca din $f \in M$, $g \in L^1$ să rezulte $g * f \in M$. Dacă reușim să aproximăm produsul $g * f$ prin combinații liniare de translatate ale lui f, cum M este închis, totul va fi terminat.

Să remarcăm că va fi suficient să considerăm proprietatea de mai sus doar pentru g funcții în scară, sau chiar funcții caracteristice de intervale, căci ele generează pe L^1. Fie deci $g = 1$ pe $[a, b]$ și zero în afara lui $[a, b]$, $h = g * f$; $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x-t)\mathrm{d}t$. Fie $\varepsilon > 0$ dat (arbitrar). Există atunci $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît $|s-t| < \delta(\varepsilon)$ să implice $\|f_s - f_t\| < \varepsilon$ (proprietatea 1°). Alegem o diviziune d: $a = t_0 < t_1 < \ldots t_n = b$ a intervalului $[a, b]$ de normă $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ și considerăm funcția $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(x - t_k)$.

Dar

$$h(x) - h_n(x) = \int_a^b f(x-t)\mathrm{d}t - \sum (t_k - t_{k-1}) f(x - t_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(x-t) - f(x-t_k)]\mathrm{d}t,$$

deci

$$\| h - h_n \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} | [f(x-t) - f(x-t_k)] | \,\mathrm{d}t\, \mathrm{d}x.$$

Schimbînd ordinea de integrare în fiecare termen al sumei găsim că

$$\| h - h_n \| \leqslant \sum \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| f_{-t} - f_{-t_k} \| \, dt \leqslant \varepsilon(b - a),$$

căci, din modul cum am ales diviziunea, $\| f_{-t} - f_{-t_k} \| < \varepsilon$.

Demonstraţia este încheiată dacă remarcăm că $h_n(x)$ este o combinaţie liniară de translatate ale lui f, deci $h_n \in M$ şi deci $h \in M$.

O a doua chestiune pe care o vom examina se va referi la o altă algebră de funcţii (pe care am întîlnit-o şi în primul paragraf al acestui capitol), anume algebra funcţiilor continue pe circumferinţa unitate care se pot prelungi în interior ca funcţii analitice, sau dacă vreţi, a funcţiilor analitice pe $\{ |z| < 1 \}$ şi continue pe discul $\{ |z| \leqslant 1 \}$. Mai înainte însă vom face cîteva consideraţii generale, pe care le vom aplica acestui caz.

Fie K un spaţiu compact şi H o submulţime compactă a sa, iar A un subspaţiu al lui $C(K)$ cu proprietatea că $1 \in A$ şi că, pentru orice $f \in A$, $\| f \|_K = \| f \|_H$ (normele fiind $\| f \|_K = \sup_{x \in K} | f(x) |$, $\| f \|_H = \sup_{x \in H} | f(x) |$. Să notăm cu A_H mulţimea funcţiilor definite pe H, restricţii ale funcţiilor ce aparţin lui A. Bineînţeles, M este un subspaţiu al lui $C(H)$ şi, în plus, orice $\varphi \in M$ are o prelungire unică la un element din A (că ci dacă f_1, f_2 sînt funcţii din A, astfel ca $f_1|_H = f_2|_H = \varphi$, atunci $f_1 - f_2 = 0$ pe H, deci $\|f_1 - f_2\|_K = \|f_1 - f_2\|_H = 0$, adică $f_1 = f_2$). Există deci o corespondenţă biunivocă între A şi H, cu păstrarea normei. Fie acum x un punct oarecare din K, şi $f \in A$. Atunci $| f(x) | \leqslant \| f \|_H$, deci aplicaţia $f \to f(x)$ este o funcţională liniară pe A şi deci (pe baza corespondenţei biunivoce amintite mai înainte) poate fi considerat şi ca o funcţională liniară şi bineînţeles continuă, pe M. Conform teoremei lui Hahn-Banach, o putem prelungi (desigur nu neapărat în mod unic) la o funcţională liniară şi continuă L

pe $C(H)$ de normă 1 (căci, pentru $f \equiv 1$, $L(f) = 1$), astfel ca $Lf = f(x)$ pentru orice $f \in M$. Această formă liniară este şi pozitivă (adică $Lf > 0$, dacă $f > 0$), lucru pe care îl admitem (de altfel, nu e greu de arătat). Atunci, conform teoremei lui Riesz, există o măsură μ_x, pozitivă pe H, astfel că $Lf = \int_H f d\mu_x$ pentru orice $f \in C(H)$, deci, în particular, pentru $f \in A$,

$$f(x) = \int_H f d\mu_x.$$

Cu alte cuvinte, valoarea lui f într-un punct se reprezintă printr-o integrală în raport cu o măsură ce depinde de acel punct, măsură purtată de H.

Remarcaţi că a fost esenţial faptul că $\|f\|_H = \|f\|_K$ pentru orice $f \in A$. O mulţime H cu această proprietate se numeşte o *frontieră* pentru A. Această denumire va fi justificată de algebra funcţiilor analitice în interiorul cercului unitate şi continue pe circumferinţa $|z| = 1$.

Să mai remarcăm că măsura μ_x este unic determinată de L; dar L este doar prelungirea aplicaţiei $f \to f(x)$ şi s-ar putea să existe mai multe astfel de prelungiri.

Vom concretiza aceste chestiuni pe un exemplu important. Fie A algebra funcţiilor definite pe discul $K = \{ z \mid |z| \leqslant 1 \}$, analitice în interior şi continue pe contur. Să notăm $U = \{ z \mid |z| < 1 \}$ şi $H = \{ z \mid |z| = 1 \}$. Din cauza analiticităţii (principiul maximului) condiţia $\|f\|_H = \|f\|_K$ este îndeplinită, funcţia 1 aparţine evident lui A şi sîntem plasaţi în condiţiile de mai înainte. Deci, pentru orice $f \in A$ şi orice $z \in K$, există o măsură μ_z (pozitivă), astfel încît $f(z) = \int_H f d\mu_z$. Vrem să vedem cum arată aceste măsuri. Vom remarca mai întîi că orice funcţie $f \in C(H)$ poate fi aproximată uniform prin polinoame trigonometrice (teorema lui Stone-Weierstrass) şi apoi că orice

polinom trigonometric $P(\theta)=\sum_{k=-1}^{m}\alpha_k e^{i\theta k}$ poate fi scris sub forma $P(\theta) = P_1(\theta) + \overline{P_2(\theta)}$, unde P_1 și P_2 sînt de forma $\sum_{l\geqslant 0}\beta_l e^{il\theta}$ și deci aparțin lui A (funcțiile $e^{il\theta}$ se prelungesc în mod evident ca funcții analitice în U, dacă $l \geqslant 0$).

Aceasta ne permite să arătăm că măsura μ_z ($|z| \leqslant 1$) este *unică*. În cazul contrar, ar exista două măsuri μ_z^1 și μ_z^2, astfel ca

$f(t) = \int_H f d\mu_z^1 = \int_H f d\mu_z^2$, deci, notînd $\mu_z = \mu_z^1 - \mu_z^2$, $\int f d\mu_z = 0$ pentru orice $f \in A$.

Măsura μ_z este reală (ca diferență a două măsuri pozitive), deci vom avea și $\int_H \bar{f} d\mu_z = 0$ pentru orice $f \in A$. Dar atunci $\int_H (P_1 + \bar{P}_2) d\mu_z = 0$ pentru orice două polinoame trigonometrice aparținînd lui A, deci $\int_H P(\theta) d\mu_z = 0$ pentru orice polinom trigonometric și cum acestea sînt dense în $C(H)$, $\int f d\mu_z = 0$ pentru orice $f \in C(H)$, prin urmare $\mu_z = 0$.

Putem încerca acum să determinăm măsurile μ_z. În primul rînd, dacă $z = e^{i\theta}$, atunci din

$$f(z) = \int_H f d\mu_z = \varepsilon_z(f)$$

și din unicitatea măsurii μ_z rezultă în mod necesar că $\mu_z = \varepsilon_z$, unde am notat cu ε_z măsurile unitate în punctul z (așa-numita măsură a lui Dirac, notată mai înainte cu δ).

Mult mai interesant este cazul $|z| < 1$. Atunci z este de forma $re^{i\theta}$, cu $0 \leqslant r < 1$. Cum $z^n \in A$ ($n = 0,1,2,\ldots$), avem formula de reprezentare. Pentru a preciza notația, vom nota cu z^n funcția $z \to z^n$ și cu $\zeta = re^{i\theta}$ punctul fixat.

Deci

$$z^n(\zeta) = \int_H z^n(t)\mathrm{d}\mu_\zeta = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{int}\, \mathrm{d}\mu_\zeta = r^n e^{in\theta}, n = 0,1,2,\ldots$$

Cum μ_ζ este o măsură reală, $\int \bar{f}\mathrm{d}\mu_\zeta = \overline{\int f\mathrm{d}\mu_\zeta}$, deci

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int}\mathrm{d}\mu_\zeta = r^n e^{in\theta},\ n = 1,2, \ldots$$

Ambele formule se pot reuni sub forma $\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int}\mathrm{d}\mu_\zeta = r^{|n|} e^{in\theta}$. Fie $P_r(\theta - t)$ funcția definită astfel:

$$P_r(\theta - t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)},$$

t fiind real și $0 \leqslant r < 1$. Este clar că această serie converge uniform (căci este majorată în modul de $\sum r^{|n|}$). Să calculăm integrala

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t) e^{int}\,\mathrm{d}t.$$

Din cauza convergenței uniforme a seriei care definește pe $P_r(\theta - t)$ putem integra termen cu termen și găsim că

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\, e^{int}\,\mathrm{d}t = r^{|n|} e^{in\theta},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dar în acest caz $\int_H f\mathrm{d}\mu_\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{in\theta})\, P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t$ pentru $f = z^n \in A$, deci pentru orice polinom trigonometric și deci pentru orice $f \in C(H)$. Cu alte cuvinte $d\mu_\zeta = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{d}t$. Un calcul direct arată că $P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}$, deci, în definitiv, pentru orice $f \in A$ avem

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\,\mathrm{d}t.$$

Această formulă se numește *formula lui Poisson.*

În sfîrşit, vom încheia cu caracterizarea funcţiilor continue pe circumferinţa unitate care aparţin algebrei A.

Teoremă. Fie f continuă pe circumferinţa unitate. Pentru ca $f \in A$ este necesar şi suficient ca

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(t)\mathrm{d}t = 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

Demonstraţie. Dacă $f \in A$, f este dezvoltabilă în serie de puteri ale lui $z = re^{i\theta}$, deci limită uniformă de polinoame în z care verifică evident aceste condiţii, de unde necesitatea.

Suficienţa apelează la faptul următor: dacă $f \in C(H)$, atunci funcţia $f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)\mathrm{d}t$ $(r < 1)$ este definită şi continuă pe întreg discul unitate, ceea ce rezultă uşor remarcînd că $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(t)\mathrm{d}t = 1$, dacă utilizăm inegalitatea evidentă pentru orice f continuă

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \sup_H |f| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{d}t$$

şi dacă în sfîrşit utilizăm densitatea funcţiilor de forma $g_1 + g_2$ $(g_1, g_2 \in A)$ în $C(H)$.

Fie deci f astfel încît $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(t)\mathrm{d}t = 0$, $n = 1,2,\ldots$

Considerăm funcţia $f(re^{i\theta})$ (care prelungeşte pe f la întreg K) şi refacem calculele de mai înainte în sens invers:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_z(\theta - t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in}(\theta - t)\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

deci f este analitică în $|z| < 1$ (am notat cu $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$).

Această caracterizare permite a se arăta faptul următor: algebra A este o subalgebră închisă maximală a lui $C(H)$. Cu alte cuvinte, dacă B este altă subalgebră închisă a lui $C(H)$ cu $A \subset B \subset C(H)$, atunci sau $B = A$ sau $B = C(H)$. Acesta este desigur un rezultat remarcabil. Există numeroase alte rezultate de acest tip, asupra cărora însă nu insistăm. Ceea ce trebuie subliniat este că tocmai îmbinarea unor metode fine de analiză cu considerații funcționale sau algebrice au permis, în ultimii 15 ani, o mai bună cunoaștere și înțelegere a numeroase probleme de teoria funcțiilor, de teoria aproximării și altele. Chestiunile expuse sînt desigur destul de simple și ele au doar rolul de a vă ilustra puterea acestor metode.

ÎNCHEIERE

Iată-ne ajunşi la capătul călătoriei noastre prin Analiza matematică. În speranţa că unele din chestiunile tratate v-au interesat şi că aţi dori să vă completaţi cunoştinţele şi în primul rînd aţi dori să examinaţi demonstraţiile acelor cîtorva teoreme utilizate în cursul expunerii, fără demonstraţii, iată cîteva indicaţii bibliografice. Ne vom referi îndeosebi la texte în limba română, ele fiind, desigur, larg accesibile.

Găsiţi o demonstraţie a lemei lui Zorn (datorată lui I. Barbălat) într-un apendice al cărţii lui C. T. Ionescu Tulcea, *Spaţii Hilbert*, Editura Academiei, Bucureşti, 1956; o demonstraţie a teoremei de compacitate a lui Tihonov se găseşte în *Grupuri topologice* de L. S. Pontreaghin (traducere din limba rusă, litografiat I.S.R.S.), Bucureşti, 1956; demonstraţia teoremei lui Fubini o găsiţi atît în volumul III al tratatului de *Analiză Matematică* de acad. Miron Nicolescu, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960, cît şi în *Funcţii reale şi elemente de analiză funcţională*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962, de acelaşi autor. Cartea lui I. P. Natanson, *Funcţii de o variabilă reală*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957, conţine de asemenea o demonstraţie a teoremei lui Fubini.

Teoria integralei în raport cu o măsură scalară oarecare este dezvoltată în tratatul de *Analiză matematică* vol. III deja amintit, de acad. Miron Nicolescu. Metoda iniţială a lui Lebesgue de construcţia integralei este expusă în cartea lui Natanson amintită. Un alt mod de a construi integrala pe spaţii local compacte se găseşte în *Inele normate* de M. A. Naimark, traducere din limba rusă, litografiat I.S.R.S., Bucureşti, 1958.

În ceea ce privește formula integrală a lui Cauchy, puteți consulta *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. I, de S. Stoilov, Editura Academiei, București, 1954 (ed. a II-a, 1962).

Pentru acei cititori care vor să pătrundă mai adînc în miezul problemelor expuse există în limba română o serie întreagă de texte excelente dedicate Analizei matematice și unor capitole de Analiză funcțională, pe care cititorul interesat le poate consulta. În ceea ce privește Calculul diferențial și integral (în particular teoria integralei Riemann) puteți consulta Acad. Miron Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de Analiză matematică*, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963. Pentru chestiuni mai avansate este de preferat cartea Acad. Miron Nicolescu, *Analiza matematică*, vol. I, II, III, amintită.

În ceea ce privește problemele referitoare la teoria integralei, vedeți N. Dinculeanu, *Integrarea pe spații local-compacte*, Editura Academiei, București, 1965. Pentru cei ce doresc să cunoască elementele principale legate de teoria seriilor Fourier, a se vedea T. Ganea, *Serii trigonometrice*, Editura Tehnică, București, 1956, sau G. P. Tolstov, *Serii trigonometrice*, Editura Tehnică, București, 1955.

În sfîrșit, cititorii pot consulta, cu maxim de folos, cartea lui J. Dieudonné, *Bazele analizei moderne*, publicată inițial în limba engleză și tradusă apoi în limba rusă (se găsește acolo și un mare număr de exerciții și probleme interesante).

Redactor : AURELIAN BĂLTĂREȚU
Tehnoredactor : CONSTANȚA VULCĂNESCU

Apărut 1970. Comanda nr. 8809. Hîrtie semivelină de 63 g/m². 540×760/16. Coli de tipar 16.



Tiparul executat sub comanda nr. 90.992 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii", Piața Scînteii nr. 1, București — Republica Socialistă România